

“学生中心”教学法在高中数学核心素养培育中的应用尝试

郭晨亮

河南省开封高级中学

摘要：高中数学核心素养，它是数学课程目标的集中体现，是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现。而在数学教学中“以学生素养发展为本的教学，一定是以学生学习为中心的教学”，“问题驱动式教学设计”、“学生中心式教学活动”和“教学案例式课后反思”是培育学生数学核心素养形成的有效途径。

关键词：数学核心素养；问题设计；“学生中心”；教学反思；向量法

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2023.10.051

2017年高中课程标准及2022年义务教育课程标准明确提出：学科核心素养是学科育人价值的集中体现，是学生通过学科学习而形成的正确价值观念、必备品格和关键能力。高中数学核心素养，它是数学课程目标的集中体现，是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现。发展学生数学核心素养，有助于他们学会用数学眼光观察世界，用数学思维分析世界，用数学语言表达世界；有助于他们掌握“四基”——基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验；有助于他们在未来的生活工作中“四能”——能够发现、提出问题，分析、解决问题；有助于他们认识、理解数学的科学价值、应用价值、文化价值，形成批判性思维习惯、理性精神。

在数学教学中如何培育学生数学核心素养，一直以来都是教学改革与发展的重难点问题。根据《普通高中数学课程标准》中有关改进教学的基本理念：提倡独立思考、自主学习、合作交流等多种学习方式，激发学生学习数学的兴趣，养成良好的学习习惯，促进学生实践能力和创新意识的发展。笔者带领团队提出了“以学生素养发展为本的教学，一定是以学生学习为中心的教学”，并为此做了一些有益的尝试。

尝试一：“问题驱动式教学设计”，激发学生兴趣，催生研究方法，提升学生高中数学思维品质

当代数学家哈尔莫斯说过：“问题才是数学的心脏”，把问题作为数学教学的出发点，是现代数学教学的重要原则之一。华东师范大学叶澜教授曾经说过，教学预设和课堂生成是教师进行教学要抓的两个核心要素。所以利用“问题驱动”，做好数学教学设计，从学生的最近发展区出发，关注学生的思维发展，让每一个“问题生成”成为驱动学生积极主动思考学习的机会。

以人教A版普通高中教科书数学必修第一册3.2.2《奇偶性》习题3.2拓展探索的教学为例：

在课堂探究“你能否用数学符号语言精确地描述“函数图像关于y轴对称”这一特征吗？”的活动中，学生已经有如下研究结论：设函数 $f(x)$ 的定义域为

I ，那么对于 $\forall x \in I$ ，都有 $-x \in I$ ，且 $f(-x) = f(x)$ ，那么函数 $f(x)$ 就叫作偶函数。

类比这一学习过程，学生又发现并探究了“函数图像关于原点轴对称”这一特征所需的充要条件：设函数 $f(x)$ 的定义域为 I ，那么对于 $\forall x \in I$ ，都有 $-x \in I$ ，且 $f(-x) = -f(x)$ ，那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数。

随后，在课后习题3.2拓展探索中，提出如下有关函数对称性的问题：类比奇函数的定义，有同学发现可以将其推广为函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $P(a, b)$ 对称的充要条件是函数 $y=f(x+a)-b$ 为奇函数，为此学生是迷茫的。因为该问题的提出缺少发现和预设的过程，解决该问题所需的思路和方法也不够明确和具体。

基于此，为了能够让学生顺利解决该问题，本着最近思维发展区的原则，我降低了问题的门槛。设计了一系列的子问题，引领学生开展探究活动：

考虑到轴对称现象更容易观察，我将问题具体化，提出子问题1：画出并观察函数 $f(x) = (x-2)^2$ 和 $g(x) = |x-2|$ 的图像，你能发现这两个函数图像有什么共同特征吗？

学生通过画图发现：这两个函数的图像都关于直线 $x=2$ 对称

子问题2：类比偶函数定义的发现过程，你能用数学符号语言精确地描述函数 $f(x)$ 这一特征吗？

这里老师在提出问题的同时，也点明了研究问题的方法——类比法。学生类比发现： $f(1) = f(3)$ ， $f(0) = f(4)$ ， $f(-1) = f(5)$ ，...，当自变量取一对到数2距离相等的数时，相应的两个函数值相等。即 $f(2-x) = f(2+x)$

为了让学生发现规律，教师可以让学生自己多举一些例子，学生兴趣就会被激发，自己设计子问题3：

例如：函数 $f(x)$ 图像关于直线 $x=-2$ 对称需满足的数量特征条件是什么？或者满足 $f(-2-x) = f(-2+x)$ 这样的数量关系的函数 $f(x)$ 关于什么对称？

学生探究可得：函数 $f(x)$ 图像关于直线 $x=-2$ 对称的充要条件是 $f(-2-x) = f(-2+x)$

教师趁热打铁，引领学生发现一般规律，提出子问题4：

函数 $f(x)$ 图像关于直线 $x=a$ 对称的充要条件是什么？

学生回答： $f(a-x) = f(a+x)$

这样的话，学生就找到了函数 $f(x)$ 图像关于直线 $x=a$ 对称的定义，即 $f(a-x) = f(a+x)$ 。它揭示了任取一对到轴 $x=a$ 距离相等的自变量值时，对应的两个函数值相等。

类比函数轴对称规律的发现，教师顺势给学生提出子问题5：

你能用类比法，给出函数 $f(x)$ 关于点 $P(a, b)$ 对称的定义吗？

学生探究发现：根据函数 $f(x)$ 关于点 (a, b) 对称的数量特征，可以发现，任取一对横坐标为 $a-x$ 和 $a+x$ 的点A、B时，点A、B关于点 $P(a, b)$ 对称，此时点A、B所对应的两个函数值 $f(a-x)$ 和 $f(a+x)$ 满足 $f(a-x) + f(a+x) = 2b$ （中点坐标公示）。

对照拓广探索中提出的原问题：函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $P(a, b)$ 对称的充要条件是函数 $y=f(x+a) - b$ 为奇函数。提出子问题6：

能否用定义法证明 $y=f(x+a) - b$ 为奇函数等价于 $f(a-x) + f(a+x) = 2b$ ？

学生动手验证可得：根据 $f(-x+a) - b = -(f(x+a) - b)$ ，所以 $f(a-x) + f(a+x) = 2b$ 。

通过上述一系列的子问题设计，学生不仅知道了函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $P(a, b)$ 对称的充要条件为什么是函数 $y=f(x+a) - b$ 为奇函数？而且进一步理解了函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $P(a, b)$ 对称的数量特征条件是 $f(a-x) + f(a+x) = 2b$ ，期间催生了类比法和定义法，提升了学生直观想象和数学抽象的数学思维品质。

考虑到一个“好问题”的提出还具有外延性，教师还可以给学生布置以下思考问题，激发学生进一步学习的兴趣：

(1) 证明：函数 $f(x)$ 图像关于直线 $x=a$ 对称的充要条件是函数 $y=f(x+a)$ 为偶函数。

(2) 证明：函数 $f(x)$ 满足 $f(b-x) = f(a+x)$ ，则 $f(x)$ 图像关于 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称。

(3) 求函数 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 图像的对称中心

(4) 你能否从图像平移的角度解释函数 $f(x)$ 图像关于直线 $x=a$ 对称的充要条件是函数 $y=f(x+a)$ 为偶函数吗？

在平时的教学中，如果我们教师能够坚持从学生实际学习出发，帮助学生发现并提出问题，通过精心设计“问题串”，让“好问题”引领学生分析并解决问题，这岂不正是对学生“四能”的一种提高吗？对发展学生数学核心素养也不失是一种有益的尝试。

尝试二：“学生中心式教学活动”，调动学生思维，打破思维禁锢，增进学生实践能力和创新意识的发展

“以学生为中心”的教学模式，是强调学生主动参

与构建的学习模式。教师从了解学生的学习状况着手，以知识的掌握和知识的实践应用为导向，鼓励学生积极思考，勇于表达自己的观点和思想。

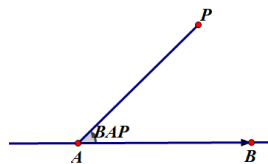
在人教A版普通高中教科书数学选择性必修一中，新教材先后安排了“空间向量与立体几何”与“直线和圆的方程”这两章，其中“点到直线距离问题”在这两章中均有出现，从研究方法上看明显是加强了向量法在解决几何问题中的应用。

首先在“空间向量与立体几何”这一章中，如何求“直线 l 外一点 P 到直线 l 的距离呢”？笔者在教学实践中发现，新教材先是引入了直线 l 的方向向量，即取直线 l 上任意两点A、B形成的向量 \vec{AB} ，然后取点A和点P形成向量 \vec{AP} ，进而求出 \vec{AP} 在直线 l 上的投影向量 \vec{AQ} ，这样的话，点P到直线 l 的距离 $d=PQ = \sqrt{|\vec{AP}|^2 - |\vec{AQ}|^2}$ 。这样的

思路设计，利用了学生初中所学的勾股定理，原本想着便于学生接受，但事实上，学生对投影向量的概念比较陌生，加之计算不便，所以这种推导方法不易被学生理解和掌握，成了学生学习过程中的一个难点。教师遇到这种问题应该如何调动学生思维，优化解决方法呢？

笔者认为，“以学生为中心”的教学，不应该只追求在课堂上学生之间的互动表现形式，更应该让学生能够利用已经掌握的知识进行实践应用，有所作为。经过学情分析发现，同学们对向量的数量积应用——求长度和夹角已然掌握，那么能否将不易求的垂直距离问题转化为易求的长度和夹角问题来解决呢？

课堂上，同学们围绕这个想法一起对探究过程作了如下改进：



如图所示：首先不再求 \vec{AP} 在直线 l 上的投影向量 \vec{AQ} ，转而求向量 \vec{AP} 的长度和向量 \vec{AP} 与直线 l 的方向向量 \vec{AB} 的夹角 $\angle BAP$ 的余弦值 $\cos \theta$ ，然后用平方关系求出 $\sin \theta$ ，这样点P到直线 l 的距离 d 就可由 $d = |\vec{AP}| \sin \theta$ 求得。优化后的思路突出体现了向量法在解决几何问题时所起的工具性作用，所涉及的数学知识学生熟悉，计算简单，便于操作，不失是一种较好的探究距离的方法。

无独有偶，在下一章“直线和圆的方程”中，教材在探究“平面内点到直线距离公式问题”时，又一次用向量法探究点到直线距离的方法。其原理是：设 $M(x, y)$ 是直线 l 上的任意一点，点 $P(x_0, y_0)$ 是直线 l 外一点， \vec{n} 是与直线 l 的方向向量垂直的单位向量，则 \vec{PQ} 是 \vec{PM} 在 \vec{n} 上的投影向量，点P到直线 l 的距离就等于 $|\vec{PQ}| = |\vec{PM} \cdot \vec{n}|$ 。该原理虽然展现了向量法探究点到直线距离公式的可能性和简便性，但同时也让学生又遇到了一个难点，那就是与直线 l 的方向向量垂直的单位向量 \vec{n} 又

该如何获得呢?课本上为此给出了一个思考探究,其发现过程让学生纷纷发出“想不到”的感慨.为此,我尊重学生的原创思维,启发学生尝试用空间中求点P到直线l的距离的方法,作出如下新的探究:

第一步:在直线l上任取两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq x_2$),

求出直线l的方向向量 $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)(1, k)$, 其中 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-A}{B}$ 是直线l的斜率,根据向量共线定理,直线l的方向向量可以取 $(1, \frac{-A}{B})$;

第二步:取直线l上与点P纵坐标相同的点 $Q(-\frac{By_0 + C}{A}, y_0)$;

第三步:求出向量 \overrightarrow{PQ} 和直线l的方向向量的夹角余弦值的绝对值 $\cos\theta = \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$,进而求出 $\sin\theta = \frac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$;

第四步:点P到直线l的距离 $d = |\overrightarrow{PQ}|\sin\theta = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

至此,向量法在解决几何问题中所起的工具性作用再次被学生理解和掌握,学生的实践能力和创新意识得到了进一步的增进和发展,教师教学也达到了“授人以鱼不如授人以渔”的效果。

尝试三:“教学案例式课后反思”,促进数学教师的思维向纵深发展,助力教师和学生形成“成长共同体”,共育核心素养

所谓教学反思,是指教师对教育教学实践的再认识、再思考,并以此来总结经验教训,进一步提高自身的教育教学水平。而教学案例则是课堂上师生间在教学过程中发生的“小故事”,这些故事反映了典型的教师教学方式方法、教学策略的运用,教学经验与教训的获得,教师教学观念的转变与保持,教学中碰到的疑难问题及其解决这些问题的方法;学生学习中的认知冲突、创造性的发现、经验与教训的获得、能力的提高等。如果能将课堂教学案例和教师的教学反思结合起来,不仅能够促进教师专业化成长,更是能够让数学核心素养更好地在教学实践中“落地生根”。接下来,笔者就通过一节高三复习课上发生的小故事,和大家分享这一观点。

这是我的一堂高三复习课。我信心十足的在黑板上写出三角函数最值问题的常见类型:

①形如 $y = a\sin x + b\cos x + c$ ($a, b \neq 0$)的最值;

②形如 $y = A(\sin x + \cos x) + B\sin x\cos x$ 的最值

③形如 $y = A\sin(\omega x + j)$ 的最值

④形如 $y = \frac{a\cos x + b}{c\sin x + d}$ 或者形如 $y = \frac{a\sin x + b}{c\cos x + d}$ 的最值

耐心讲解了这四种类型的差异后,我随之写出了一

道例题:函数 $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$ 的最大值等于_____。

我胸有成竹的认为学生一定能将此题与上述题型对上号,因只需将 $\cos 2x$ 简单地用一下余弦二倍角公式,马上就可转化为题型①。我请一位同学回答时,这位同学站起来竟一脸茫然。这下怎么办?马上给出答案?那样学生岂不就失去了思考的机会,更是失去了思考的权利吗?

我定下心来,冷静地问这位同学:“如果把 $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$ 视为变元,这个函数有几个变元?”我的冷静也使她冷静下来“两个变元”她答道。“它是整式还是分式?”“整式。”“那么排除类型④”。“能转化为 $A\sin(\omega x + j)$ 的形式吗?”答:“不能!”“为什么?”“因为 $a\sin x + b\cos x$ 可转化为 $A\sin(\omega x + f)$ 。而此式两余弦,其中一单角一倍角, $\cos 2x$ 转正弦单角则出现 $\sin^2 x$,次数不是一次...,啊,老师,我知道了!两个变元转化为一个变元,这就转为了类型①。”这时全班学生报以热烈的掌声。看到学生因获得知识和智慧而喜悦的神情,我也笑了!

课后,对于数学教学过程中如果遇到学生解决不了的问题,教师应该怎么办?我及时进行了教学反思.本着尊重学生,鼓励学生的原则,让学生自己独立思考,勇于表达,经历整个问题的生成、发展、解决的过程,方能体会到数学核心素养形成的乐趣。这不正是《普通高中数学课程标准》中有关改进教学的基本理念的具体要求体现吗?

通过以上三点的尝试和探究,我进一步感受到培养学生数学核心素养的重要性和必要性,感悟到数学教师只有“以学生为中心”,感受学生的疑难和困惑,从而督促自己深研教材,将传统的教授学生知识转化为和学生共同探究解决实际问题的过程,这样才能真正使学生高中数学核心素养的培育“悄然花开”!

参考文献

[1]中华人民共和国教育部制定,普通高中数学课程标准[M].人民教育出版社,2017版。

[2]章建跃,核心素养立意的高中数学课程教材教法研究[M].华东大学出版社,2021版。

[3]史宁中.高中数学核心素养的培养、评价与教学实施[J].中小学教材教学,2017(5):4-9。

[4]孔凡哲,史宁中.中国学生发展的数学核心素养概念界定及养成途径[J].教育科学研究,2017(6):5-11。

[5]钟启泉.基于核心素养的课程发展:挑战与课题[J].全球教育展望,2016年45期。

[6]蒋海燕.中学数学核心素养培养方略[M].山东人民出版社,2017版。

本文系“2023年度河南省教育科学规划课题《“学生中心”教学法在高中数学核心素养培育中的应用研究》2023YB0747”研究成果。