

函数极限解决高等数学问题中的应用

窦文涛

江苏师范大学科文学院

摘要: 函数极限理论作为高等数学中的核心概念, 是微积分、级数等领域中的概念和问题深入理解的工具。本文旨在研究函数极限理论在高等数学问题中的应用, 从解决极限问题的角度和方法出发。具体而言, 将从求函数的极限的求解方法方面展开讨论。

关键词: 高等数学; 函数极限; 等价无穷小的替换; 泰勒公式

【DOI】 10.12252/j.issn.2096-6288.2023.11.130

引言

函数极限是高等数学的开端, 同时也是高等数学的基础和核心, 为之后的学习提供了关键性的支撑和理解。本文通过解决函数极限的等价无穷小、洛必达法则、泰勒公式、导数的定义、拉格朗日中值定理、柯西中值定理等多种方法展开, 为更加全面深刻的掌握极限理论和解决方法解决问题的能力具有重要意义。

函数极限

函数极限是研究函数在某个特定点附近的性质和函数在无穷远处的性质的一种数学概念。函数的极限, 根据自变量的变化趋势可以分为6种不同的情形:

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (2) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ (3) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
 (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ (5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

按照函数值的变化情形来分类, 则函数的极限又可分为不定式和非不定式, 求解非不定式的极限的求解相比于确定不定式极限求解要简单的多, 本文以探讨不定式极限的问题和解决方法为主。

对于函数非不定式的极限, 即有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 将自变量的值带入函数即可求出函数的极限值。对于函数不定式的极限, 共有7种类型:

$\frac{0}{0}$ 、 $\frac{\infty}{\infty}$ 、 $\infty - \infty$ 、 $0 \cdot \infty$ 、 1^∞ 、 0^0 、 ∞^0 , 针对这些不定式同样有等价无穷小、洛必达法则、泰勒公式、导数的定义、拉格朗日中值定理、柯西中值定理等不同的方法解决。

等价无穷小的替换求函数极限

等价无穷小的替换方法是求解高等数学函数极限

一种常用且重要的技巧, 两个重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 和

$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ 还有其他常用的等价无穷小如下 ($x \rightarrow 0$):

- (1) $x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x$ (2) $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ (3) $\ln(x+1) \sim x$
 (4) $e^x - 1 \sim x$ (5) $a^x - 1 \sim x \ln a$ ($a > 0$) (6) $(1+x)^a - 1 \sim ax$

针对一些极限问题, 我们可以通过等价无穷小替换将复杂的问题简单化, 下面将举例说明:

例题一:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan 2x \ln(x+1)(2^x - 1)}{(e^x - 1)(1 - \cos x)(\sqrt{1+x} - 1)}$$

解题方法: 根据等价无穷小的替换可将原式化为:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 2x \cdot x \cdot x \ln 2}{x \cdot \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{2}x} = 8 \ln 2$$

此题将求复杂的函数极限转化为简单的函数极限求解, 等价无穷小的替换是在函数极限不定式因子趋于0时的替换, 若是趋于无穷, 则可以用倒代换方法满足条件进而运用等价无穷小的替换进行求解。

洛必达法则求函数极限

洛必达法则是利用导数来计算具有不定型的极限的方法, 它可以在一定条件下通过求解函数的导数, 对分子分母分别求导再求极限来确定不定式值的方法。

例题二: 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \int_{-x}^x (\frac{\sin t}{t})^2 dt}{x - \sin x}$$

解题方法: 此题分母可以用泰勒公式换算后, 用洛

必达法则求解，即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2 \int_0^x \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt}{\frac{1}{6}x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\frac{1}{2}x^2}$$

结合泰勒公式得

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)}{x^2} = \frac{4}{3} \frac{x^3}{x^3} = \frac{4}{3}$$

用洛必达法则求不定式的极限，是一种简便而有实效的方法。同时，洛必达法则也可和其他求极限的方法共同解决函数极限问题。

泰勒公式求函数极限

在求不定式极限时，泰勒公式可以将所求极限从一个复杂的式子中分离出一个形式简单的“主要部分”，有利于简化计算。带皮亚诺余项泰勒公式：设函数

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

其中， $o((x - x_0)^n)$ 为带皮亚诺余项泰勒公式， $x_0 = 0$ 当时成为麦克劳林公式。以下从几个例题来深入体会。

例题三：求

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n!)$$

解题方法：利用指数函数 e^x 的带拉格朗日余

项的泰勒公式，有 $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} +$

$\frac{e^{\theta_n}}{(n+2)!}$, $0 < \theta_n < 1$ ，所以

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{e^{\theta_n}}{(n+2)!}\right)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(2\pi k + \frac{2\pi}{(n+1)} + \frac{2\pi e^{\theta_n}}{n^2 + 3n + 2}\right) \quad (\text{其中 } k \text{ 为正整数}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{(n+1)} + \frac{2\pi e^{\theta_n}}{n^2 + 3n + 2}\right)}{\frac{2\pi}{(n+1)} + \frac{2\pi e^{\theta_n}}{n^2 + 3n + 2}} \left(\frac{2\pi n}{(n+1)} + \frac{2\pi n e^{\theta_n}}{n^2 + 3n + 2}\right) \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

导数的定义求解函数极限

我们可以使用导数的定义来求解抽象函数的不定式极限。首先，我们需要将所求极限凑成某个可导函数的增量。假设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导，且 $f'(a)$ 存在。通过

下面例题深度理解：

例题四：求极限

$$I = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^3 + 9} \cdot \sqrt[3]{2x^2 - 17} - 6}{4 - \sqrt{x^3 - 23} \cdot \sqrt[3]{3x^2 - 19}}$$

解题方法：经过分析可知此题是“ $\frac{0}{0}$ ”型不定式，此题便可从导数的定义求解函数极限来入手。令

$m(x) = \sqrt{x^3 + 9} \cdot \sqrt[3]{2x^2 - 17}$ ，令 $n(x) = \sqrt{x^3 - 23} \cdot \sqrt[3]{3x^2 - 19}$ 。即可将原式化为

$$I = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{m(x) - 6}{x - 3}}{\frac{4 - n(x)}{x - 3}} = -\frac{m'(3)}{n'(3)}$$

对于 $m(x) = \sqrt{x^3 + 9} \cdot \sqrt[3]{2x^2 - 17}$ 和 $n(x) = \sqrt{x^3 - 23} \cdot \sqrt[3]{3x^2 - 19}$ ，可通过 $\varphi'(x) = \varphi(x)[\ln \varphi(x)]'$ 技巧简化计算，即

$$\begin{aligned} m'(x) &= m(x) \left[\frac{3x^2}{2(x^3 + 9)} + \frac{4x}{3(2x^2 - 17)} \right] & m'(3) &= \frac{105}{4} \\ n'(x) &= n(x) \left[\frac{3x^2}{2(x^3 - 23)} + \frac{2x}{3x^2 - 19} \right] & n'(3) &= \frac{33}{2} \\ I &= -\frac{m'(3)}{n'(3)} = -\frac{35}{22} \end{aligned}$$

拉格朗日中值定理求解函数极限

拉格朗日中值定理是微分学中的基本定理之一，它反映了可导函数在闭区间上的整体的平均变化率与区间内某点的局部变化率的关系。定理：如果函数 $f(x)$ 在闭区间上 $[a, b]$ 连续，在开区间 (a, b) 上可导，那么在开区间

(a, b) 内至少存在一点 ξ 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 。我们可以使用这个定理来求解函数的极限。

例题五：求极限

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1+x)^{\frac{e}{x}}} - 1}{x^2}$$

解题方法：此题先做对数恒等变形得 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{e}{x}}(1+x)} - 1}{x^2}$

，显然是此题是 $\frac{0}{0}$ 型不定式，用拉格朗日中值定理求解，令 $m(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ，令 $n(x) = \frac{e}{x} \ln(1+x)$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} m(x) = \lim_{x \rightarrow 0} n(x) = e$ ，根据拉格朗日中值定理有 $e^{m(x)} - e^{n(x)} = e^{\xi} [m(x) - n(x)]$ ，

其中 ξ 介于 $m(x)$ 与 $n(x)$ 之间, 即当 $x \rightarrow 0$ 时, $\xi \rightarrow e$, 有 $e^{m(x)} - e^{n(x)} = e^\xi [m(x) - n(x)]$ 。

$$I = e^{e+1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} - \frac{\ln(1+x)}{x}}{x^2}$$

记 $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} - 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 再结合泰勒公式,

$$e^{f(x)} = 1 + f(x) + \frac{f(x)^2}{2} + o(f(x)^2) = \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{(x + \ln(1+x))^2}{2x^2} + o(f(x)^2)$$

其中 $o(f(x)^2)$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时比较 $f(x)^2$ 高阶无穷小, 即有

$$I = e^{e+1} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} + \frac{o(f(x)^2)}{f(x)^2} \right] \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \right)^2 = \frac{1}{8} e^{e+1}$$

此题用拉格朗日中值定理简化计算, 在结合泰勒公式进行求解, 在求解过程中 $\lim_{x \rightarrow 0} m(x) = \lim_{x \rightarrow 0} n(x) = e$, 使得 ξ 只能取值为 e , 是拉格朗日中值定理极具特色的求解函数极限的方法。

柯西中值定理求函数极限

柯西中值定理是解决函数极限题一种重要的方法, 它反映了可导函数在闭区间上的整体的平均变化率与区间内某点的局部变化率的关系。设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足: (1) 在 $[a, b]$ 上都连续 (2) (a, b) 上都可导 (3) $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 不能同时为零 (4) $g(a) \neq g(b)$, 则

$$\text{存在 } \xi \in (a, b), \text{ 使得 } \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}。$$

例题六:

$$I = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x^x) - \sin(3^3)}{3^{x^x} - 3^{3^3}}$$

解题方法: 此题可用柯西中值定理求极限, 令 $f(x) = \sin x$, $g(x) = 3^x$, 即有

$$I = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x^x) - f(3^3)}{g(x^x) - g(3^3)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

其中在 $x \rightarrow 3$ 条件下 ξ 介于 x^x 和 3^3 之间, 又因为

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^x = \lim_{x \rightarrow 3} 3^x = 27, \text{ 即有}$$

$$I = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\cos 27}{3^{27} \ln 3}$$

总结

本文介绍了等价无穷小、洛必达法则、泰勒公式、导数的定义、拉格朗日中值定理、柯西中值定理等方法, 用于解决函数极限问题。通过学习这些方法, 我们能更好地理解函数极限的概念和性质, 掌握求解函数极限的技巧和步骤。同时, 这些方法也有助于加深对微积分概念和原理的理解, 提高数学素养和思维能力。

参考文献

- [1] 余志坤. 全国大学生数学竞赛解析教程[M]. 北京: 科学出版社, 2023.
- [2] 赵士元. 数列及函数极限的几种特殊求法[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2023, 41(05).
- [3] 韦慧, 倪晋波. 高等数学中函数极限计算的几种方法[J]. 安阳工学院学报, 2023, 22(02).
- [4] 王明伟, 朱亚培, 温晓楠等. 对函数极限教学的探究[J]. 现代商贸工业, 2023, 44(08).

