问渠那得清如许，为有源头活水来
——一道教材习题的探究式教学

冷笑波
江西省修水县第一中学

摘　要：自2020年伊始全面实施新课程标准，使用新教材，实行高考改革，我国开启素质教育新时代。随着新时代新课程新教材新高考“四新”时代来临，如何有效地进行高中数学教育已成为师生共同的新课题。我的研究结果是：为全面落实普通高中数学课程标准，增强课堂效果，我们熟练运用新课程理念，研究新教材，理解其所蕴含的数学思想，熟悉高中知识体系，遵循数学的规律，统筹教学内容与时间，创新教学，启发思考，发展学生数学学科核心素养，提升数学的关键能力，为新时代高中教育贡献自己的智慧。

关键词：研究新教材；数学核心素养；数学关键能力；创新教学；高效课堂
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2024.02.024

引言

数学家克莱因说：“数学是人类最高超的智力成就，也是人类心灵最独特的创作。”自2021年江西省开始使用高中新教材起，新一轮课程改革在全省如火如荼地展开。在新课程理念指导下，高中数学新教材是普通高中数学新课程标准（2017年版2020年修订）的载体，也是培养高中学生数学学科核心素养重要的教学资源[2]。研究新教材是高中数学教学的重要一环。挖掘新教材，合理利用课本进行创新教学已成为一线教师的每日主题。现以北师大新教材必修二（2019版2022年第六次印刷）中第120页练习第四题为例进行探究式教学，多角度解答，启发学生思维，发展学生数学核心素养。本题探究教学过程整理如下：

一、创设情景——导入课题

同学们，我们学习平面向量的运算及向量的应用。掌握用向量运算求有关长度和角度，知晓三角形中的正弦定理、余弦定理。请同学们看下题如何求解。

【问题一】已知 ΔABC 的三个顶点是 $A(-5,0), B(3,3), C(0,2)$, 求角C的余弦值并判断 ΔABC 的形状。[1][设计意图]：联想已学知识，应用平面向量夹角公式求角 C 的余弦值，根据三角形的分类及边角关系，结合其余弦值的符号即可判断ΔABC的形状。旨在增强学生数学应用意识，激发学生学习兴趣，提高学习欲望。

【规范过程】解：$\overrightarrow{CA}=(-5,-2), \overrightarrow{CB}=(3,-5), \overrightarrow{AB}=(8,-3)$,

则 $\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{29}, \left|\overrightarrow{CB}\right|=\sqrt{34}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{73}$, 得 $\left|\overrightarrow{AB}\right|>\left|\overrightarrow{CB}\right|>\left|\overrightarrow{CA}\right|$

即角C为非等腰 ΔABC 的最大内角。

$$\cos C=\cos\left\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|}=\frac{-5\sqrt{986}}{986}, \text{即} \cos C<0.$$

由 $C\in(0,\pi)$，得角 C 为钝角。所以 ΔABC 为非等腰钝角三角形。

二、探讨研究——深化认识

【问题二】已知 ΔABC 的三个顶点是 $A(-5,0), B(3,-3), C(0,2)$, 尝试多种方法求 ΔABC 的面积。请同学们发散思维，畅所欲言！[1][设计意图]：以学生为主体，坚持以核心素养为导向，培养能力为重点，用开放式设问，启发思考，让学生主动参与探究交流，打破思维定式，鼓励学生一题多解，在解题过程中追求多元化答案，丰富学生的基本活动经验，适当拓展思维空间，推陈出新。旨在让学生学会从不同角度思考问题，解题中巩固方法，夯实核心素养。（给足时间，学生充分思考，让我们一起见证他们的思维升华。）

学生甲：画出坐标系作图，求出边AB所在直线对应的一次函数：$y=-\frac{3}{8}x-\frac{15}{8}$ 及其与 y 轴的交点 $M(0,-\frac{15}{8})$，则 $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ACM}+S_{\Delta BCM}=\frac{1}{2}|CM|(|X_A|+|X_B|)=\frac{31}{2}$。

学生乙：求出边BC所在直线对应的一次函数：$y=-\frac{5}{3}x+2$ 及其与 x 轴的交点 $N(\frac{6}{5},0)$，则

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ANC}+S_{\Delta ANB}=\frac{1}{2}|AN|\cdot(|y_C|+|y_B|)=\frac{31}{2}。$$

[教师点评]：这两位同学用分割法将所求三角形的面积转化两个易求三角形的面积之和。这方法简便！我们有两个解题方案。

学生丙：在坐标系中过点A作 y 轴的平行线，过B点分别作 x、y 轴的平行线，过C点作 x 轴的平行线，形成矩形 $BDEF$。

由图形易知 $D(3,2)$、$E(-5,2)$、$F(-5,-3)$,

所以 $S_{\Delta \mathrm{ABC}}=S_{\text{矩形}\ BDEF}-S_{\Delta ABF}-S_{\Delta ACE}-S_{\Delta BCD}=\frac{31}{2}$。

[教师点评]：丙同学将不规则三角形的面积转换为矩形与直角三角形的面积来计算。这补形法也简便！我们还有其他方法吗？

学生丁：我的解题过程如下

由两点距离公式得 $a=|BC|=\sqrt{34}, b=|AC|=\sqrt{29}, c=|AB|=\sqrt{73}.$

用我国数学家秦九昭的三角形面积公式

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{\frac{1}{4}[b^2c^2-(\frac{b^2+c^2-a^2}{2})^2]}=\frac{31}{2}$$

[教师点评]：这是个好方法！丁同学由三边边长用

秦九昭三角形面积公式直接求解，非常快捷。此题用秦九昭面积比海伦公式更方便。亲爱的同学们，我们可以用向量运算求解此题吗？

学生戊：设边AC与y轴的交点M（0，m），则 $\overrightarrow{AC}=(5,m)$, $\overrightarrow{AB}=(8,-3)$, 由 $\overrightarrow{AC}\parallel\overrightarrow{AB}$，则 $5\times(-3)-8m=0$ 得 $m=-\frac{15}{8}$ 即 $M(0,-\frac{15}{8})$. 故 $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ACM}+S_{\Delta BCM}=\frac{1}{2}|CM|\cdot(|X_A|+|X_B|)=\frac{31}{2}$。

学生己：设边BC与 x 轴的交点N（n，0）则 $\overrightarrow{CN}=(n,0)$, $\overrightarrow{CB}=(3,-5)$ 且 $\overrightarrow{CN}\parallel\overrightarrow{CB}$, 得 $n\times(-5)-3\times(-2)=0$, 解 $n=\frac{6}{5}$，即 $N(\frac{6}{5},0)$。故 $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ANC}+S_{\Delta ANB}=\frac{1}{2}|AN|\cdot(|y_C|+|y_B|)=\frac{31}{2}$。

[教师点评]：这两名同学运用平面向量共线定理求解交点，优化解题方案！由正弦三角形面积公式有长度和角度，我们联想到向量数量积运算，亲爱的同学们可用向量数量积来计算三角形面积呢？

学生庚：$\overrightarrow{AB}=(8,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(5,2)$ 得 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{73}$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{29}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=34$

则 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{34\sqrt{2117}}{2117}$, $\sin\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\sqrt{1-\cos^2\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle}=\frac{31\sqrt{2117}}{2117}$,

则 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{31}{2}$

学生辛补充说：这种方法计算比较麻烦，运用平面向量的数量积坐标运算更简单。

由已知得 $\overrightarrow{BC}=(-3,5)$, $\overrightarrow{BA}=(-8,3)$, 由 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2-(ac\cos B)^2}$

故 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{BC}^2\overrightarrow{BA}^2-(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA})^2}=\frac{31}{2}$

[教师点评]：为这两位同学点赞！他们不仅用向量的数量积成功计算出三角形的面积，而且注意计算技巧，运用平面向量的坐标运算简化计算。因此，我们得到三角形面积的第一种向量公式！亲爱的同学们，能否利用向量方法求出顶点到对边的距离计算此三角形面积呢？

学生任、癸（异口同声地说）：老师，我是这样做。依题知

方法一：$\overrightarrow{AB}=(8,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(5,2)$, 设向量 $\vec{p}=(x,y)$ 是直线 AB 的法向量，

则 $\vec{p}\perp\overrightarrow{AB}$ 即 $\vec{p}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 得 $8x-3y=0$, 令 $x=3$, 则 $y=8$. 故 $\vec{p}=(3,8)$.

那么点 C 到直线 AB 的距离 $d=\left|\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\right|=\frac{31\sqrt{73}}{73}$，则 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|d=\frac{31}{2}$.

方法二：$\overrightarrow{AB}=(8,-3)$, $\overrightarrow{BC}=(-3,5)$, 设 $\vec{q}=(x_1,y_1)$ 是直线 BC 的法向量，

则 $\vec{q}\perp\overrightarrow{BC}$ 即 $\vec{q}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 得 $-3x_1+5y_1=0$, 令 $x_1=5$, 则 $y_1=3$. 即 $\vec{q}=(5,3)$.

那么点 A 到直线 BC 的距离 $d_1=\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{q}}{|\vec{q}|}\right|=\frac{31}{\sqrt{34}}$, 则 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|d_1=\frac{31}{2}$.

[教师点评]：任、癸两位同学利用平面向量的投影数量的绝对值几何意义求三角形的高，高效地计算此三角形的面积，亲爱的同学们，这方法告诉我们得到三角形面积的第二种向量公式！

三、抽象概括——共同创新

【问题三】已知 ΔABC 的三个顶点是 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, 用平面向量运算求 ΔABC 的面积。

[设计意图]：将三角形的顶点坐标一般化，启发思考，训练学生对抽象语言的理解能力，激发学生的认知内驱力[3]，引导学生探究，发现其隐含的规律，推导三角形的坐标面积通用公式。旨在巩固方法，通过数学逻辑推理运算三角形的面积公式坐标化、一般化，培养求知欲望，感受数学的统一性，体会数形结合思想，帮助学生理解向量的数学内涵，深刻领会向量在解决实际问题中发挥重要作用，培养学生直观想象、数据分析、数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养，提升思维能力[2]。

[探讨交流]同学们认真思考，教师在课堂巡视观察。有部分学生思考良久，未得解法，少数同学眼睛中流露畏难情绪。教师坚持“不愤不启，不悱不发”的理念，点拨启发学生做抽象题的一般思路与策略是化抽象为具体，数形结合等。鼓励学生数形结合，化抽象于具体，将字母视为已知量，通过数学抽象、数据分析处理、逻辑推理，运用平面向量运算与三角形面积公式，得到解决方案。同学们积极思考，主动交流，大声回答两个思路：一、计算两边对应向量的模长与数量积来求三角形的面积。二、用点到直线的向量距离公式求出三角形的高，计算三角形面积。

教师温馨提示：思路清晰，计算过程字母较多，可用换元法简化过程。

学生解题过程：依题知 ，$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)=(s,t)$, $\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1)=(p,q)$

令 $|\overrightarrow{AB}|=c$, $|\overrightarrow{AC}|=b$, ΔABC 的面积为 $S_{\Delta ABC}$。则

方法一：$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2-(bc\cos A)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AC}^2\overrightarrow{AB}^2-(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(s^2+t^2)(p^2+q^2)-(sp+tq)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{t^2p^2+s^2q^2-2sptq}=\frac{1}{2}\sqrt{(tp-sq)^2}$

$=\frac{1}{2}|tp-sq|=\frac{1}{2}|sq-pt|=\frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)|$

方法二：设 $\vec{n}=(x_0,y_0)$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 垂直，则 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, 即 $x_0s+y_0t=0$

令 $x_0=-t$, 则 $y_0=s$, 即 $\vec{n}=(-t,s)$. 故点 C 到直线 AB 的距离

$d=\left|\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{(-t)p+sq}{\sqrt{(-t)^2+s^2}}\right|=\frac{|sq-tp|}{\sqrt{t^2+s^2}}$,

则 ΔABC 的面积 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\mathrm{d}=\frac{1}{2}\times\sqrt{s^2+t^2}\times\frac{|sq-tp|}{\sqrt{t^2+s^2}}$

$=\frac{1}{2}|sq-pt|=\frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)|$

[习题小结]：同学们，你们非常棒！我们获得三角形的两种向量面积公式和三角形的坐标面积公式！它们具有普遍性，可计算任意三角形的面积。

四、自主实践——巩固四基

[练习一]根据下列条件画图，观察并判断以 A、B、C 为顶点的三角形的形状再求其面积。

① 已知 $A(-1,-1)$ $B(2,3)$ $C(3,-1)$；② 已知 $A(2,5)$, $B(5,2)$, $C(10,7)$。

[练习二]秦九韶面积公式是数学史上著名的公式，已知 ΔABC 中的三角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c。请同学们一题多解证明秦九韶三角形面积公式 $S_{\Delta ABC}=\sqrt{\frac{1}{4}[a^2c^2-(\frac{a^2+c^2-b^2}{2})^2]}$。

[设计意图]：跟踪训练，学以致用，让学生了解数学史，提高学生数学阅读能力，落实“四基”、培养“四能”。

五、课堂小结——整体提高

[教师提问]：通过这堂课学习，我们收获什么呢？

学生：通过这堂课学习回顾求三角形面积的常用方法，根据三角形的面积公式，合理利用坐标的特点，进行三角形的分割、补形转化求三角形面积，此后又结合平面向量知识，应用向量运算计算三角形面积。在研究学习中我们学会并掌握三角形的两种向量面积公式和三角形的坐标面积公式。

[教师点评并提问]：同学们总结很好！本堂课中我们用到哪些方法？你有哪些感悟呢？

学生：主要有解析法、平面向量法。我们体会向量是沟通几何与代数的桥梁，也是解决问题重要的工具。一题多解，发散思维，突破思维瓶颈，拓展思维的广度，培养创新能力。

[教师概括]本堂课以习题载体，重点探索平面向量的应用，“创新”推理出三角形的面积向量公式和坐标公式，运用数形结合思想、化归转化思想探究三角形的面积计算。我们新获得三个三角形面积公式。

在ΔABC中，令$\overrightarrow{AB}=\vec{a}=(s,t),\overrightarrow{AC}=\vec{b}=(p,q),\vec{n}=(t,-s)$是直线$AB$的法向量，设$\Delta ABC$的面积为$S_{\Delta ABC}$。则$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\vec{a}^2\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$；$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\vec{a}|\left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\frac{1}{2}|sq-tp|$

若ΔABC的$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$,

则$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)|$

六、教学反思——优化质量

（一）本堂习题课通过对习题充分探究，创新教学，激发学生的发散思考，并在对这道习题理解基础上，让学生运用数学抽象、逻辑推理，推广到任意三角形的向量面积公式与坐标面积公式，体会数学的一般性，培养学生平面向量应用意识，体验形与数的结合，懂得几何直观与代数运算之间的融合，加强对数学整体性的理解，积极探索将科学形态的数学转化为教育形态的数学的途径，以达到闻一知十的教学效果。本堂课也为下一节“用正弦定理、余弦定理解三角形”教学起到承上启下铺垫准备的作用。本题还可用选择性必修一第一章《直线与圆》中点到直线距离公式求三角形的面积。每位学生都可以做这道习题，只是各自付出的努力程度不同，收获也不尽相同。这就是践行“人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展”[2]高中数学新课程标准的理念。

（二）为打造高效数学课堂，教师要树立育人为本，师德为先，能力为重，终身学习的基本理念，需从数学课程内容四条主线整体研究把握教材，梳理高中数学知识的关联，把握核心概念的本质，养成用数学的眼光发现和提出问题，用数学逻辑思维分析和解决问题、用数学的语言表达和交流问题的习惯[2]，把握“四基”与核心素养的关联，提升自身的“四基”水平，从横、纵方向定义大单元教学，整体设计教学内容，有目的地让学生将已学的知识、方法迁移到新问题中并创造性解决问题；亦需要关注教学内容的范围和难度，聚焦课堂所承载的数学核心素养，通过开放式设问、递进式设问，激发学生的认知内驱力，使学生学会多角度思考，拓宽其思维视野，领略数学思维的灵活性与创造性；注意数学运算与逻辑推理能力训练，帮助学生养成优秀思维习惯；在课堂中提升教师教学实践能力，强化教学效果。从现代教学论来看，高效数学课堂就是以学生为主体、教师为主导，师生共同构建知识平台，让学生经历知识的形成与应用过程，形成对数学知识的理解，提升数学核心素养，形成优秀思维品质的过程，它更是引导学生掌握“如何学”，实现学生从“学会”到“会学”的有效教学过程。

（三）落实数学教学过程中学生评价，促进学生学习数学的积极性，增强教育教学活动的效果。赞美是培养学生创新思维和创造能力的催化剂。在教学过程中教师及时对学生从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力作出积极评价，激发其数学学习的兴趣，使学生享受成长的快乐。通过观察学生的学习行为和思维过程，教师既充分肯定学生的进步，也要发现学生思维活动的不足特征与教学中存在的问题，及时反思并改进教学设计，调整教学的方法与技巧，探索多种有效途径启发学生思考，达到举一反三的成效，使其感悟数学的本质，掌握数学技能，优化学生的学习方法和思维习惯，提升教师的数学专业素养，增强教与学实践能力，提高教学质量[2]。

“问渠那得清如许，为有源头活水来。”在新课程改革不断向纵深推进的今天，高中数学教学的源头就是普通高中数学课程标准与数学新教材，它蕴含新时代党的德智体美劳“五育并举”的教育方针和“一核四层四翼”的中国高考评价体系，它包括数学概念、性质、公式、定理以及由其蕴含的数学思想，和教学过程中数学运算、数据处理、数学建模等活动中基本技能。为深化新课程改革，克服“唯分数”顽瘴痼疾，发展学生的素质教育，教师只有认真践行新课程标准理念，树立以发展学生数学学科核心素养为导向的教学意识，充分领悟教材中的数学思想和方法，在教学活动中展示知识的生成、发展的过程，重视习题通性通法，注重知识间的融会贯通，才能在高效课堂中落实“四基”、培养“四能”，促进学生数学关键能力、实践能力和创新意识的发展。习近平总书记强调：“惟创新者进，惟创新者强，惟创新者胜。”[3]在“四新”时代的大背景下，在教育教学实践中我们坚持守正创新，用好新教材，耕耘教学，落实新课标，创新教学，启发思考，优化新课堂，努力做到脑中有课标、腹中有教材、心中有学生、手中有方法，更好地服务于人民教育。

参考文献

[1]普通高中教科书《数学》（必修第二册），北京师范大学出版社。

[2]《普通高中数学课程标准》（2017年版2020年修订）中华人民共和国教育部制定，人民教育出版社。

[3]《习近平金句》《教育学》《学习论》《学与教的心理学》《数学思想史导论》。