探究高中数学中的轨迹问题

吴丽娴
浙江工贸职业技术学院人文学院

摘 要：轨迹问题是近年来高考的热门考点.解决轨迹问题可以全方位考查学生各方面的能力.轨迹问题常出现在复杂多变的数学意境中，且涉及数学学科的多个知识点.轨迹问题是学生学习的难点.轨迹问题求解，不仅要熟悉有关轨迹的基础知识，还需要灵活运用求解方法与策略.本文在轨迹的概念及相关定理的基础上，以高考中频繁出现的轨迹问题为依托，归纳总结了求解轨迹方程的几种方法，如：定义法、相关点法、参数法、待定系数法等，并且结合例题分析给出相应的求解策略.

关键词：轨迹；定义法；参数法；相关点法
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2024.04.085

一、引言

轨迹问题是近年来高考的热门考点.解决轨迹问题可以全方位考查学生的逻辑思维能力、运算能力、分析问题和解决问题的能力.轨迹问题在求解时不仅计算量比较大，而且涉及数学学科的多个知识点.解决轨迹问题，对课程学习而言有着至关重要的帮助.

已有许多学者做了这方面的研究，如：赵银仓在《中国数学教育》发表了“解决一类椭圆切线有关的轨迹问题的策略探究--以2014年高考数学广东卷文理科第题为例”此文分类讨论了有关轨迹问题，并拓展到如何用向量法求解轨迹问题.宋书华在《数学教学》发表了“与圆锥曲线有关的圆（弧）轨迹的探究”.此外，黄俊峰、郝安军、梁达等一批学者做了许多工作，但对具体的解题策略研究并不透彻.时至今日，探究高中数学中的轨迹问题仍是一个热门的课题.本文在轨迹的概念及相关定理的基础上，以近几年高考中频繁出现的轨迹问题为依托，归纳总结出平面解析几何中求解轨迹方程的方法并给出求解策略.

二、轨迹问题的相关知识

通俗地说，轨是指一定的规律，迹是物体运动时所走过的痕迹.

（一）轨迹定义

定义1 动点P按照一定规律运动时所留的痕迹.

定义2 动点P按照一定条件作尽可能移动所经过的路线.

定义3 符合一定条件的动点P所形成的图形.

（二）基本轨迹定理

轨迹	定理
圆	到定点距离相等的点组成的轨迹
垂直平分线	到两个已知点距离相等的点的轨迹
椭圆	到平面内与两个定点的距离之和为常数$2a$ $(2a>\|F_1F_2\|)$的动点的轨迹
抛物线	平面内到定点和定直线的距离相等的点的轨迹
	平面内与两个定点的距离之差为常数$2a$ $(2a<\|F_1F_2\|)$的动点的轨迹
两条射线	面内与两个定点的距离之差为常数$2a$ $(2a=\|F_1F_2\|)$的动点的轨迹

三、求轨迹问题的一般方法

（一）定义法

定义法求轨迹方程的一般步骤

（1）判断动点P的运动轨迹，确定是否符合题中已知某种曲线的定义；

（2）设出标准轨迹方程C，再根据已知条件，待定方程中的基本量；

（3）求解轨迹方程.

例1平面内动点与定点$P(-b,0)$、$Q(b,0)$ $(b>0)$连线的斜率之积等于非零常数n.且动点的轨迹与P、Q两点所形成的曲线C的轨迹不定.求曲线C的方程.

解 设动点为N，其坐标为(x,y)；

当 $x\neq\pm b$ 时，由条件可得 $k_{NP}k_{NQ}=\dfrac{y}{x-b}\cdot\dfrac{y}{x+b}=\dfrac{y^2}{x^2-b^2}=n$.

即$nx^2-y^2=nb^2(x\neq\pm b)$.

又$P(-b,0)$，$Q(b,0)$的坐标满足$nx^2-y^2=nb^2(x\neq\pm b)$.

故依题意得，曲线C的方程为$nx^2-y^2=nb^2$.

当$n<-1$时，曲线C $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{-nb^2}=1$，C是焦点位于$y$轴上的椭圆；

当$n=-1$时，曲线C $x^2+y^2=b^2$，C是以原点为圆心的圆；

当$-1<n<0$时，曲线C $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{-nb^2}=1$，C是焦点位于$x$轴上的椭圆；

当$n>0$时，曲线C $\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{nb^2}=1$，C是焦点位于$x$轴上的双曲线.

分析　将已知条件数学化，再通过化简即可得所求点的轨迹方程. 在求解时应当考虑特殊点. 对于轨迹问题的求解，必须要全面考虑. 其次，在运用定义法求解轨迹问题时，需熟知一些常见基本轨迹定理.

（二）相关点法（代入法）

若动点$P(x,y)$的运动是由相关点$M(x_0,y_0)$的运动引起的，且相关点的运动轨迹已知，通过列出式子代入可得动点的轨迹方程，此法称为相关点法.

相关点法求轨迹方程的一般步骤：

（1）分析已知条件；

（2）寻找关系式$x_0=f(x,y)$，$y_0=g(x,y)$；

（3）将x_0，y_0代入已知曲线方程；

（4）整理x_0，y_0的数学表达式得到所求轨迹方程.

例2　设抛物线C：$y^2=2px\,(p>0)$焦点为F，点Q在C上，$|QF|=5$，若以QF为直径的圆过点$(0,2)$，求C的轨迹方程.

解　C的方程为$y^2=2px\,(p>0)$，焦点$\left(\frac{p}{2},0\right)$，$|OF|=\frac{p}{2}$，$QF$为直径的点过$(0,2)$，设$B\,(0,2)$，$QF$为直径，故$BF\perp BQ$；

在直角三角形BOF中

$$|BF|=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+4}=\frac{\sqrt{p^2+16}}{2};$$

$$\sin\angle OBF=\frac{OF}{BF}=\frac{\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{p^2+16}}{2}}=\frac{p}{\sqrt{p^2+16}}$$

由抛物线的定义得直线BO切圆于点B，因此可得$\angle OBF=\angle BQF$. 由于

$$|QF|=5,|BF|=\frac{\sqrt{p^2+16}}{2}$$

在直角三角形BQF中

$$\sin\angle OBF=\frac{BF}{QF}=\frac{p}{\sqrt{p^2+16}}=\frac{\frac{\sqrt{p^2+16}}{2}}{5}$$

化简得$p^2+16=10p$，解得$p=2$或$p=8$，抛物线方程$y^2=4x$或$y^2=16x$.

分析　此方法的关键是找到相关点，通过相关点可以求得轨迹方程中的系数，从而得到轨迹方程.

（三）参数法

若采用直接法或者其他方法不可求轨迹C，则可寻找引起动点P运动的参数变量t，建立函数关系，进行消参、化简，得出轨迹方程C，此方法为此参数法.

参数法求轨迹方程的一般步骤：

（1）选择适当的参数t，用t表示动点P的坐标；

（2）求P的轨迹参数方程$x=f(t)$，$y=g(t)$；

（3）消除参数t，得到P的轨迹方程$F(x，y)=0$；

（4）由t的取值范围x，y的范围.

例3　设$\lambda>0$，A的坐标$(1,1)$，B在抛物线$y=x^2$上运动，Q满足$\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{QA}$，过Q与$x$轴垂直的直线交抛物线于M，点P满足$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{MP}$，求点P的轨迹方程.

解　由$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{MP}$　知Q，M，P三点同在一条直线上. 故可设$P(x,y)$，$Q(x,y_0)$，$M(x,\ x^2)$，则　$x^2-y_0=\lambda\left(y-x^2\right)$.

即$y\ =\lambda\left(y-x\ \right)-\lambda y$　①

再设$B(x_1,y_1)$，由$\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{QA}$. 得$(x-x_1,y_0-y_1)=\lambda(1-x,1-y_0)$.

$x_1=(1+\lambda)x-\lambda$，$y_1=(1+\lambda)y_0-\lambda$.　②

将①式代入②式，消去y_0，得

$x_1=(1+\lambda)x-\lambda$，$y_1=(1+\lambda)^2x^2-\lambda(1+\lambda)y-\lambda$. ③

又知点B在抛物线$y=x^2$上，所以$y_1=x_1^2$，再将③式代入$y_1=x_1^2$，得

$(1+\lambda)^2x^2-\lambda(1+\lambda)y-\lambda=((1+\lambda)x-\lambda)^2$

整理得$2\lambda(1+\lambda)x-\lambda(1+\lambda)y-\lambda(1+\lambda)=0$.

因$\lambda>0$，两边同除以$\lambda(1+\lambda)$，得$2x-y-1=0$.

故所求点P的轨迹方程为$y=2x-1$.

分析　此方法适用于轨迹动点与坐标关系不明确. 考虑将动点的横纵坐标用一个或多个参数表示，消去参数得到轨迹方程C. 参数法中常选变化的角、变化的斜率等作为参数，需注意参数的取值范围对动点横纵坐标变化的影响.

（四）待定系数法

曲线形状已知时，通常选用待定系数法求解轨迹方程.

待定系数法求解轨迹方程一般步骤：

（1）作判断：依据条件判断圆锥曲线的焦点在x或y轴上，或两个坐标轴都可能；

（2）设方程：根据步骤1设出方程；

（3）找关系：文字语言数学化，建立方程；

（4）得方程：解方程，即可得轨迹方程.

例4　已知A、B、D三点不共线，且$A(-2,0)$，$B(2,0)$，$\left|\overrightarrow{AD}\right|=2,\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$. 过A作直线交以A、B为焦点的椭圆M、N两点，线段MN的中点到y轴的距离为$\frac{4}{5}$，MN与E点的轨迹相切，求椭圆方程.

解　设$E(x，y)$由$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$知E为BD的中点，$D(2x-2,2y)$. 又$\left|\overrightarrow{AD}\right|=2$，则　$x^2+y^2=1\,(y\neq0)$.

设$M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，中点$(x_0，y_0)$. 由题意设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-4}=1$.

直线MN的方程为$y=k(x+2)$. 又因直线MN与E的轨迹相切，故$\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$.

解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

将 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$ 代入椭圆方程并整理，得 $4(a^2-3)x^2+4a^2x+16a^2-3a^4=0$.

所以 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{a^2}{2(a^2-3)}$；

由题知，$x_0=\frac{4}{5}$，即 $\frac{a^2}{2(a^2-3)}=\frac{4}{5}$，解得 $a^2=8$. 所求椭圆方程 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

分析　待定系数法在已知轨迹的形状、性质的题中比较常用. 这类型题极易与三角、数列、平面向量等知识结合出题，同时考查推理运算的能力；分类与整合、数形结合的思想. 在计算时需体会向量、三角、数列的作用，注意简化运算.

（五）几何法

求动点轨迹问题时，动点的几何性质或多或少的与平面几何中的定理及有关平面几何知识有着直接或间接的联系，因此可以利用平面几何或解析几何的知识分析图形性质，得到包含题中已知量和动点坐标的数学等式，化简后就可以得到动点的轨迹方程，此方法称为几何法.

例5　已知两定点 $A(-6,0)$，$B(2,0)$，O为原点，动点P线段AO、BO

间的夹角相等，求动点P的轨迹方程.

解　设 $P(x,y)$，有 $\angle APO=\angle BPO$，依据三角形的角平分线定理知

$$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{|AO|}{|BO|}.$$

故 $\frac{\sqrt{(x+6)^2+y^2}}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}=3$.

整理得 $x^2+y^2-6x=0$，当 $x=0$ 时，$y=0$，P和O重叠，没有任何意义，所以 $x\neq 0$. 又可知P在 x 轴上时，任何点均有 $\angle APO=\angle BPO=0^0$，除线段AB以外. 故 $y=0$（$x<-6$ 或 $x>2$）也满足要求.

综上，轨迹方程为　$x^2+y^2-6x=0$（$x\neq 0$）或 $y=0$（$x<-6$ 或 $x>2$）.

分析　几何法经常利用平面几何知识，如：三角形的角平分线定理、圆的垂径定理、垂直平分线进行解题，便于求轨迹方程.

（六）直接法

已知动点运动的几何等量关系，且可直接数学化为含 x，y 的等式，通过整理化简即可得动点的轨迹方程，此方法称为直接法.

直接法求轨迹方程的一般步骤：

（1）建立坐标系，并设相关点；

（2）翻译几何条件为数学等式；

（3）通过代换使其成为代数方程；

（4）整理并化简方程；

（5）检查并验证所求轨迹方程即为所得.

例6　已知平面上两定点 $A(\sqrt{2},0)$，$B(-\sqrt{2},0)$动点P在 y 轴上的射影为Q，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PQ}^2$. 求动点P的轨迹E的方程.

解　设 $P(x,y)$，$Q(0,y)$，由已知得

$\overrightarrow{PQ}=(-x,0)$，$\overrightarrow{PA}=(\sqrt{2}-x,-y)$，$\overrightarrow{PB}=(-\sqrt{2}-x,-y)$.

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2-2+y^2$.

又知 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PQ}^2$.

故可得 $x^2-2+y^2=2x^2$.

即所求轨迹方程为 $y^2-x^2=2$.

分析　直接法求解轨迹方程问题的题型常与平面几何中的向量结合考查. 解题时，只需将题中的几何关系式直接翻译成代数等式，再经过化简，即可得到轨迹方程.

（七）交轨法

可选取同一个参数，建立两动曲线的方程，然后消去两动曲线方程中的参数即可得到两动曲线交点的轨迹方程（有时还可以由三点共线，斜率相等寻找关系）.

例7　已知 $P(-2,2)$，$Q(0,2)$ 以及直线 L：$y=x$. 设长为 $\sqrt{2}$ 的线段 AB 在直线 L 上移动. 求直线PA与QB交点的轨迹方程.

解　设 $M(x,y)$，$A(t,t)$，$B(t+1,\ t+1)$；直线 PA 与 QB 的方程分别是

$y-2=\frac{t-2}{t+2}(x+2)$，$(t\neq -2)$①

$y-2=\frac{t-1}{t+1}x$，$(t\neq -1)$②

由①②两式消去 t 得 $x^2-y^2+2x-2y+8=0$

即 $\frac{(x+1)^2}{8}-\frac{(y+1)^2}{8}=1$.

当 $t=-1$ 或 $t=-2$ 时，直线 PA 与 QB 的方程也满足上式.

因此，方程 $\frac{(x+1)^2}{8}-\frac{(y+1)^2}{8}=1$ 即为所求的轨迹方程.

分析　本题利用点斜式求直线方程的方法，列出方程，然后消去参数，化简，就可得到所求点的轨迹方程. 此外，应该考虑特殊点是否满足该曲线方程.

（八）向量法

在轨迹问题中已知条件经常涉及平行、共线的知识，而平行、共线问题的求解与计算又与向量共线的充要条件紧密相关. 因此，在求解与此相关的轨迹方程时会用到向量法.

例8　已知 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(p,\ q)$是三角形 OAB 的三

个顶点，并且三角形OAB的重心为C，外心为D，垂心为E，当直线DE与OA平行时，求顶点B的轨迹方程.

解 由$O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(p,q)$ $(q\neq 0)$可求得重心C为$\left(\frac{1+p}{3},\frac{q}{3}\right)$，外心D为$\left(\frac{1}{2},\frac{p^2+q-p}{2}\right)$，垂心E为$\left(p,\frac{p-p^2}{q}\right)$，因为

$\overrightarrow{DC}=\left(\frac{2p-1}{6},\frac{-3p^2+3p-q^2}{6q}\right)$，$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{2p-1}{2},\frac{-3p^2+3p-q^2}{2q}\right)$

且$\overrightarrow{DC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$，所以C、D、E三点共线.又知$\overrightarrow{OA}=(1,0)$，并且有$\overrightarrow{DE}$平行于$\overrightarrow{OA}$.

$\frac{-3p^2+3p-q^2}{2q}=0$；$\frac{2q-1}{2}\neq 0$.

设$B(x,y)$，则顶点B的轨迹方程为$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$.其中$x\neq\frac{1}{2}$，$y\neq 0$.

分析 本题的要求是求轨迹方程，实质是了解学生对向量平行的掌握程度.主要是利用三点共线转化为向量等价条件来解决问题的.

（九）复数法

在题中已知两个点A、B相对应的复数，并且明确了其中一点A(或B)与其相对应的具体复数，而已知另一点B(或A)移动轨迹.依据相关关系求A(或B)的轨迹，则我们应该考虑使用复数法解决问题.

例9 已知点$P(a,b)$与复数Z相对应，而点$Q(x,y)$与复数$2z+3-4i$相对应，假若点P在已知曲线$|z|=1$上自由移动，那么求点Q对应的轨迹方程.

解 由已知得P与复数z对应，令$z=a+bi$.则

$2z+3-4i=2(a+bi)+3-4i=(2a+3)+(2b-4)i=x+yi$.

从而有$x=2a+3$，$y=2b-4$.

解之得$a=\frac{x-3}{2}$，$b=\frac{y+4}{2}$.

又由$|z|=1$，可得$a^2+b^2=1$.

进行代入计算可得$\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+\left(\frac{y+4}{2}\right)^2=1$.

化简得Q的轨迹方程为$(x-3)^2+(y+4)^2=4$.

分析 本题根据数轴上的点与复数的一一对应关系，将相关复数进行假设，并通过已知曲线代入，经过替换即可得所求点的轨迹方程.

四、结论

（一）轨迹问题的实质

求曲线方程C是解析几何学的两大基本问题之一.求符合某种条件的动点P的轨迹，其实质就是利用题设列出轨迹满足的几何条件，通过坐标互化将其转换为寻求变量间关系，再经过整理、化简，求得轨迹方程.

（二）轨迹问题的类型

探求轨迹有两大类型：一种是已知几何关系、轨迹未知，常用求轨迹的方法有直接法、相关点法（又称代入法和参数法）；另一种是曲线类型已知，轨迹未知常采用定义法和待定系数法.

（三）轨迹问题的易错点

求解曲线方程，首先要明确圆锥曲线C的性质，选好解题策略和拟定好具体解法，如参数t的选取，相关点的变化规律及限制条件等等注意将动点 P的几何性质合理数学化.求轨迹方程问题时，易错的是对轨迹纯粹性和完备性的忽略，因此，在求得轨迹方程C后，应仔细检查有无不符合条件的点或轨迹掺杂，若有及时删除.另一方面，还应注意有无遗漏的点或轨迹，若有将其补充.即轨迹上的点不能含有杂点，也不能少点，也就是曲线上的点应与轨迹方程C相符合.

五、结束语

高中数学的轨迹问题是中学数学的重点及其难点.轨迹问题的知识与平面几何、立体几何、解析几何等相关知识密切相关.本文正是在这样的背景下探究的，以近年高考中常见的求解轨迹问题的题型为例，给出了求解轨迹方程的一般方法.同时为了拓宽学生的解题思维也加入了两种并不常用的方法向量法和复数法.首先，阐述每一种方法的解题突破口；其次，并对每一种方法进行举例；最后，归纳出对应的求解策略.

参考文献

[1]赵银仓.解决一类椭圆切线有关的轨迹问题的策略探究--以2014年高考数学广东卷文理科为例[J].中国数学教育，2015（1）：107-111.

[2]宋书华.与圆锥曲线有关的圆（弧）轨迹的探究[J].数学教学，2007（2）：8-10.

[3]毛鸿翔，左铨如.轨迹[M].哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.

[4]陈化贞.一个轨迹问题的探讨[D].中学数学，1982.

[5]黄俊峰，袁方程.椭圆中一类轨迹问题的探究[J].数学教育研究，2010（2）：8-10.

[6]寇恒清.对一类轨迹问题的探究[J].数学通报，2015，54（2）：50-54.

[7]郝安军.2013年高考解析几何大题亮点之求轨迹方程[J].中学数学研究，2013（12）：38-40.

[8]梁达.探究圆锥曲线的切线的交点轨迹问题[J].数学通讯，2014（2）：42-45.

作者简介：吴丽娴（1993.6-），女，汉族，山西吕梁人，硕士，浙江工贸职业技术学院人文学院，助教，研究方向：应用数学与高职教育。