教育强国战略下基于双目标整数规划模型的专任教师人力资源优化配置方案研究

姜晓燕　门玉霞　熊敏　李朗　曾灿璐

四川卫生康复职业学院附属自贡市第一人民医院

摘　要：党的二十大作出了“加快建设教育强国”的战略部署，在区域基础教育资源配置过程中，主管部门主要关注的是学校需求预测、教师资源引进和分配。本文提出了简单随机抽样、分类预测和关联预测等三种方法进行需求预测；建构三种数学模型（概率模型、整数规划模型、双目标整数规划模型）实现专任教师人力资源进行优化分配、引进方案的制定。

关键词：教育强国；双目标整数规划；教育资源；优化配置

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2024.07.015

引言

通过调研获得 70 所初中的 15 门课程、5 种职称的现有教师存量和需求量（调研表 1）以及 70 所初中对 15 种教师（63 类）有需求的学校数量（调研表 2）。进而解决三个问题：问题 1：对调研表 2 中的每一种教师来说，应该至少引进多少人，才能保证有教师需求的学校中至少有 50% 能够在 1 年内获得所需的教师？如果要求保证在 1 年内至少 95% 的学校能够获得所需的教师呢？问题 2：如何对调研表 1 中的存量教师进行分配，才能使学校总体获得最大满意度？问题 3：假设表 1 中的存量教师数量全部为 0，如何决定每种教师的引进数量，以及如何对这些增量教师进行分配，才能使 1 年内 95% 的初中能获得所需的教师，且满意度最大？

一、数学模型的建立及求解

（一）符号说明

符号	含义	说明
ξ_{ij}	第 i 个学校是否需要第 j 类教师	1：表示需要，0：表示不需要。各项之间相互独立，服从两点分布。
η_j	全体学校中需要第 j 类教师的总数	$\eta_j=\sum_{i=1}^{M}\xi_{ij}$，M 为学校总数，$\eta_j$ 服从二项分布。
x_{ij}	第 个学校是否分配到第 j 类教师	1：表示分配到，0：表示未分配到。
a_{ij}	第 i 学校对第 j 类教师的偏爱程度	即学校对教师的需求数量，值越小，偏爱程度越高，满意度越容易实现。
b_{ij}	第 i 个学校分配到第 j 类教师的满意度	$b_{ij}=1/a_{ij}$，只考虑数量上是否被满足，不考虑分配到校后教学产出的情况。a_{ij} =0 时，b_{ij} =0。
y_{ij}	政府是否为第 i 个学校引进第 j 类教师	1：表示引进，0：表示不引进。

（二）问题 1 模型的建立及求解

显然随机变量 ξ_{ij} 服从两点分布，即 $P\{\xi_{ij}=1\}=p_j$，$P\{\xi_{ij}=0\}=1-p_j$（1）

其中 p_j 的取值见表 2-1。通过问卷调查，得到 70 个学校愿意引进 5 类教师的学校数量，可得到各学校引进这些教师的概率（频率是概率的近似值）。

表 2-1　学校引进 5 类教师的概率

教师名称	1 类教师 语文三级	2 类教师 化学三级	3 类教师 体育一级	4 类教师 生命高级	5 类教师 道德二级
第 i 类教师被引进的概率	$p_1=0.243$	$p_2=0.114$	p_3　0.571	$p_4=0.086$	$p_5=0.357$

设随机变量 $\eta_j=\sum_{i=1}^{70}\xi_{ij}$，$j=1,2,\cdots,5$，即 η_j 表示 70 个学校中引进第 j 类教师的总数，由于 ξ_{ij}（$i=1,2,\cdots,70$）之间相对独立，即学校间是否引进该类教师是相互独立的，因而 η_j 服从二项分布，因引进教师的学校数量是随机的，为满足至少 50% 的学校能引进教师，那准备引进的教师数量应随机，以它的数学期望为应该准备引进的教师的数量。若以 $E(50\%\eta_j)$ 为该类教师的准备引进量，则可以得到满足至少 50% 的学校能引进到该类教师的概率。设可以保证至少 50% 的学校能引进到该教师的可靠度为 99%，即 $\Phi(t)=99\%$，由此可以得到 $t=2.33$，即：

$$P\left\{\frac{50\%\eta_j-E(50\%\eta_j)}{\sqrt{D(50\%\eta_j)}}\le 2.33\right\}=99\% \tag{2}$$

$$50\%\eta_j\le E(50\%\eta_j)+2.33\times\sqrt{D(50\%\eta_j)}=35p_j+2.33\times\frac{1}{2}\sqrt{70p_j\cdot(1-p_j)} \tag{3}$$

综上所述，以 99% 的可靠度满足至少 50% 的学校能够引进到某类教师所需要准备引进的该类教师的数量为：

$$\left[35p_j+2.33\times\frac{1}{2}\sqrt{70p_j\cdot(1-p_j)}\right] \tag{4}$$

以 99％的可靠度使得一年内 95% 的学校能引进到该教师，应准备引进的教师数量为：

$$\left[70\times95\%\cdot p_j+2.33\times0.95\sqrt{70\cdot p_j\cdot(1-p_j)}\right] \qquad (5)$$

代入相关数据，可以得到为保证至少 50%、至少 95% 的学校一年内能引进到该类教师，需要准备引进该教师的数量（见表 2-2）。

表 2-2　为了保证至少 50% 的人一年内引进该教师需要准备的教师数量

至少保证	名称 可靠度张数	1 类教师语文一级	2 类教师外语正高	3 类教师生物正高	4 类教师地理高级	5 类教师体育一级
50%	99%	13	8	25	6	18
95%	99%	25	14	48	11	33

（三）问题 2 模型的建立及求解

设对学校的分配矩阵为 X。由调研表 1，可以得到学校对教师的偏爱程度矩阵为 B。由于 a_{ij} 的数字越大，表示偏爱程度越小，同时学校得到该教师的满意度越小，因而定义第 i 个学校对分配到第 j 类教师的满意度为 b_{ij}，则学校的满意度矩阵为 C。

$$C=\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,63} \\ b_{1,1} & b_{1,1} & \cdots & b_{2,63} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{70,1} & b_{70,2} & \cdots & b_{70,63}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{70}\end{bmatrix}, \text{其中 (6)} \quad b_{ij}=\frac{1}{a_{ij}}\begin{cases}\dfrac{1}{a_{ij}}, & a_{ij}\neq 0 \\ 0, & a_{ij}=0\end{cases}$$

当第 i 个学校得到其偏爱程度为 1、2 和 3 的 3 类教师时，它是最满意的，其满意度为 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$，由此可以得到第 i 个学校的标准化满意度为：

$$\frac{X_i\cdot C_i^T}{\frac{11}{6}}=\frac{\sum_{j=1}^{63}x_{ij}\cdot b_{ij}}{\frac{11}{6}}=\frac{6}{11}\sum_{j=1}^{63}x_{ij}\cdot b_{ij},\quad i=1,2,\cdots,70 \qquad (7)$$

为使所有的学校获得最大的满意度，只要它们的满意度和达到最大。在分配过程中，每种教师分配给学校的总数不超过已有可分配的总数。由此可以得到问题 2 的模型为：

$$\max \frac{6}{11\times70}\sum_{i=1}^{70}\sum_{j=1}^{63}x_{ij}b_{ij} \qquad (8)$$

$$s.t.\quad \sum_{i=1}^{70}x_{ij}\le n_j,\ j=1,2,\cdots,63\text{。}\ x_{ij}\text{取0或1},$$
$$i=1,2,\cdots,70,\ j=1,2,\cdots,63 \qquad (9)$$

根据上述模型，使用 Lingo 软件进行求解。结果统计分析如下：目标函数满意度之和的最大值为 8.487；没有得到教师的学校数量为 0；得到教师的最少数量为 4 个教师，学校数量为 1，需求量满足率为 11.76%；得到教师的最大数量为 30 个教师，学校数量为 1，需求量满足率为 81.08%；需求量满足率最小值为 11.76%，其学校数量为 1，占学校总数的 1.43%；需求量满足率最大值 100%，其学校数量为 9，占学校总数的 12.86%；70 所学校的需求量平均满足率为 72.39%。前 8 所学校获得教师数量及其需求量满足率的情况见表 3-4。

表 3-4　前 8 所学校获得教师数量及其需求量满足率情况

学校 \ 分配 \ 名称	学校获得的教师数量	学校需求的教师数量	学校的需求量满足率
自贡市工读学校	11	11	100.00%
荣县旭阳镇富北学校	19	28	67.86%
富顺第三中学校	13	13	100.00%
富顺县高石九年制学校	21	21	100.00%
四川省自贡市第八中学	21	21	100.00%
富顺县童寺镇宝庆九年制学校	22	22	100.00%
自贡市贡井区龙潭中学校	21	28	75.00%
荣县留佳初级中学校	16	20	80.00%

（四）问题 3 模型的建立以及求解

考虑到调研表 1 中的数据，给出一种合理的引进方案，分两次完成引进方案。

二、第一阶段引进方案

设 $Y_i=(y_{i,1},y_{i,1},\cdots y_{i,63})$ 表示针对第 i 个学校的需求所选取的引进方案。

考虑有 60% 的学校每年引进教师两次，而 40% 的学校每年只引进一次，因此假设一年内会有两次引进方案，其中调研表 1 作为第一次引进方案，首先利用调研表 1 的数据给出第一阶段引进方案。在引进中，保证 95% 的学校得到想引进的教师，即 95% 的学校得到需求中的教师，同时要使各学校的满意度最大及资金预算考虑，假设每次分配中，各学校获得的教师数量不超过 5 个，给出如下模型：

$$\min\sum_{i=1}^{70}\sum_{j=1}^{63}y_{ij}$$
$$\max\frac{6}{11\times70}\sum_{i=1}^{70}\sum_{j=1}^{63}y_{ij}\cdot b_{ij}, \quad s.t.\begin{cases}0\le\sum_{j=1}^{63}y_{ij}\le5, i=1,2,\cdots,70\\ \sum_{j=1}^{63}y_{ij}\neq1, i=1,2,\cdots,70\\ \sum_{j=1}^{63}y_{ij}\neq2, i=1,2,\cdots,70\\ \sum_{j=1}^{63}y_{ij}\neq3, i=1,2,\cdots,70\\ \sum_{j=1}^{63}y_{ij}\neq4, i=1,2,\cdots,70\\ \sum_{i=1}^{70}\sum_{j=1}^{63}y_{ij}\ge70\times95\%\times5\\ y_{ij}\text{取0或1},\ i=1,2,\cdots,70,\ j=1,2,\cdots,63\end{cases} \qquad (10)$$

由上述目标函数及约束条件可以看到，此整数规划有多个解，这些解是从 70 个学校中任取 95% 以上的学校，对于 95% 以上的学校中的每一个学校选取其各偏爱程度的教师。最后统计每类教师被 95% 以上的学校选为各偏爱程度的总数，则可得到该类教师引进的数目。第一阶段引进方案使用 Lingo 软件进行求解。

三、第二阶段引进方案

为满足 95% 的学校的需求，根据 60% 的学校一年内的第二次引进需求，进行第二次引进。考虑到没有 60% 的学校第二次引进的需求量，将利用调研表 1，随机选取 42（70×60%）个学校的已有需求数据，作为第二次引进需求量。为便于数学符号上的处理，不失一般性，选择 70 所学校中的前 42 个学校的需求量作为第二次需求量。因为这 42 个学校在第一阶段引进方案中已经满足了各学校偏爱程度为 1 的教师的需求，所以在第二次需求中对在第一次分配中已分配到教师的各学校需求应减去已分配量，则第二次需求中各学校相应的满意度为 $d_{ij}=1/(a_{ij}-y_{ij})$，中 $i=1,2,\cdots,42$，$j=1,2,\cdots,63$，即若第 i 个学校在第一次分配到第 j 类教师时，则在第二次分配中，第 i 个学校对第 j 类教师的满意度分母减去已分配数量。设 $Z_i=(Z_{i,1},Z_{i,2},\ldots,Z_{i,75})$ 表示根据第二次引进需求，针对第 i 个学校的需求主管部门引进教师的方案。

在第二次分配中，当第 i 个学校得到其偏爱程度为 2、3、4、5、6 的 5 类教师时，它是最满意的，其满意度为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{87}{60}$，由此可以得到第 i 个学校的标准化满意度。为使所有的学校获得比较大的满意度，只要使它们的满意度之和达到最大即可。在第二次确定引进方案时，一方面需要考虑第一阶段引进时所有的相关问题，可得到如下模型：

$$\begin{array}{l}\min\sum_{i=1}^{42}\sum_{j=1}^{63}z_{ij}\\ \max\frac{6}{609}\sum_{i=1}^{42}\sum_{j=1}^{63}z_{ij}\cdot d_{ij}',\end{array} s.t\begin{cases}0\le\sum_{j=1}^{63}z_{ij}\le 5, i=1,2,\cdots,42\\ \sum_{j=1}^{63}z_{ij}\ne 1, i=1,2,\cdots,42\\ \sum_{j=1}^{63}z_{ij}\ne 2, i=1,2,\cdots,42\\ \sum_{j=1}^{63}z_{ij}\ne 3, i=1,2,\cdots,42\\ \sum_{j=1}^{63}z_{ij}\ne 4, i=1,2,\cdots,42\\ \sum_{i=1}^{42}\sum_{j=1}^{63}z_{ij}\ge 42\times 95\%\times 5\\ z_{ij}=0\text{或}1,\quad i=1,2,\cdots,42,\quad j=1,2,\cdots,63\end{cases}\qquad(11)$$

此模型的解法类似于第一阶段引进方案模型的解法。第二阶段引进方案使用 Lingo 软件进行求解。综合以上两步，则可以得到引进教师数量的方案为：

$$w_j=\begin{cases}\sum_{i=1}^{70}y_{ij}+\left(\sum_{i=1}^{42}z_{ij}-\sum_{i=1}^{42}y_{ij}\right), & \sum_{i=1}^{42}z_{ij}\ge\sum_{i=1}^{42}y_{ij}\\ \sum_{i=1}^{70}y_{ij}, & \sum_{i=1}^{42}z_{ij}<\sum_{i=1}^{42}y_{ij}\end{cases}\qquad(12)$$

其中 $j=1,2,\cdots,63$，w_j 表示引进第 j 类教师的数量。

两阶段综合后前 10 类教师的最终引进数量见表 3-5。

表 3-5　两阶段综合后前 10 类教教师最终的引进方案

教师	语文三级	语文二级	语文一级	语文高级	语文正高级	数学三级	数学二级	数学一级	数学高级	数学正高级
一阶段引进量	2	3	8	5	0	1	0	1	1	0
二阶段引进量	0	5	1	8	1	3	6	8	11	1
最终引进量	2	8	9	13	1	4	6	9	12	1

四、结果的合理性检验

由问题 1 的检验结果看到，要使 95% 的学校分配到自己想引进的教师的可靠度依次增大的时候，主管需引进的教师的数目也随着增大，这是符合实际情况的。问题 3 还可随机选取了 70 个学校的数据作为一组随机变量验证模型的正确性，结果同样合理。

参考文献

[1]Frank R. Giordano，William P.Fox，Steven B.Horton著，叶其孝、姜启源等译.数学建模(原书第5版)[M].机械工业出版社，2014.

[2] 韩中庚.数学建模方法及其应用 [J].高等教育出版社，2005.

[3] 于丽英，杨雷.生产计划的双目标混合整数规划模型及其求解 [J].上海交通大学学报，2021 年 7 月第 7 期第 35 卷，1100-1102.

[4] 池春姬.多目标整数规划数学模型设计 [J].鸡西大学学报，2007 年 6 月第 7 卷第 3 期，49、58.

基金项目：四川省教育厅 2022 年度四川省教育科研资助金项目课题（课题编号：SCJG22A279）