对称性思想在电磁学解题中的应用研究

何紫茹[1,2]

1. 湖南科技大学 物理与电子科学学院 2. 湖南科技大学 智能传感器与新型传感材料湖南省重点实验室

摘　要：电磁学中有很多体系具有一定的对称性，对该体系求解时，采用对称性思想可以将复杂的积分运算和矢量运算大大简化，极大便利了电磁学问题的求解。因此，掌握好对称性思想是求解电磁学问题，乃至学好电磁学的重要基础。本文通过电磁学中静电学、静磁学和电磁感应部分的典型例子阐述了如何采用对称性思想来分析体系的对称性和求解电磁学问题，揭示了对称性思想在解决电磁学问题的重要地位和作用。

关键词：电磁学；对称性思想；积分运算；矢量运算

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2024.07.143

引言

电磁学是本科阶段普通物理课程的重要组成部分之一，它不仅是物理专业也是其他理工类专业的重要必修课程。然而很多学生在电磁学的学习中，都感觉比较抽象，生涩难懂。这是由于电磁学考虑的问题大多是三维情形，而我们学习牛顿力学主要考虑的是相对简单的二维甚至一维问题。比如电磁学中一个常讨论的问题是电场或磁场的分布问题，毫无疑问场的分布是三维问题，若只讨论场在二维甚至是一维情况的分布是没有意义的，因此这就导致了电磁学问题中会涉及大量三重积分和矢量运算等较为复杂的计算，这一定程度上增加了电磁学学习的困难。然而电磁学问题中很多具有一定的对称性，若采用对称性思想则可以大大简化电磁学中问题的求解。

2002 年国际理论物理大会上，杨振宁指出，二十世纪理论物理的主旋律有三个关键词：量子化、相位因子、对称性。对称性是物理学之美的一个重要体现，在物理学很多领域对称性都扮演了重要的作用。广义上的对称性是指通过某种变换后整个系统的性质不变。对称性思想在电磁学整个的学习中具有着重要作用，这也利于提高学生的分析问题、解决问题的能力。本文就通过在电磁学中一些经典的问题来探讨对称性思想对学习电磁学的重要性，引导学生对物理学中对称性思想的重视。掌握运用对称性思想来分析复杂的物理问题[1,2]，可以启迪培养学生直觉思维能力和猜想推理的能力，更好地帮助理解物理规律。

一、对称性思想求解静电场问题

求电场强度常规的解法是用一般公式：$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\boldsymbol{e}_r$，显然我们不可避免积分的运算，且运算过程是比较繁琐的。幸运的是，对于一些电场的分布呈现高度对称性时，可以采用高斯定理：$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$来求解。由于电场具有高度对称性，我们基于对称性思想，通过场的分布特点选择合适的高斯面，从而可以避免复杂的积分运算。接下来我们通过几个典型的例子[3,4]来阐述如何利用对称性思想来求解电场强度。

（一）电场呈球对称性分布

真空中一均匀带电球面，半径为R，电量为$q>0$，试求该带电球面内外的电场的分布。

【分析】球对称均匀分布的电荷可以激发球对称分布的电场。我们用一个简单的方法可以证明，若将这个球面任意转动一定角度，你会发现球面上的电荷分布没有发生任何改变，如果球对称均匀分布的电荷不是激发一个球对称的电场，你在任意转动一定角度之后整个体系的电场分布一定会发生变化，但整个体系的电荷分布与转动前并没有发生变化，因此球对称均匀分布的电荷激发的一定是球对称的电场。

【解】根据对称性可知电荷均匀分布在球面上的电场是具有球对称性的，取过场点P作半径为 r 与带电球面同心的闭合球面为高斯面，在这个高斯面上各点的电场强度的大小都相等，方向沿径向。

如果场点P在球面外，通过高斯面的电通量为：

$$\Psi_E=\oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=E\oiint_S dS=4\pi r^2E\ (1)$$

闭合高斯面所围的电荷就是整个球面上的电荷量 q，由高斯定理有：$4\pi r^2E=\frac{q}{\varepsilon_0}$

可求出$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

如果场点P点位于球面内部，则过P点作的高斯面内的电荷量为零，由高斯定理得：$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=4\pi r^2 E=0$，即$E$=0

（二）电场呈轴对称性分布

半径为R的无限长圆柱体，电荷在圆柱体上均匀分布，求激发的电场强度

【分析】上面我们介绍过对称性是指对体系作某种变换后系统的性质不发生改变，而在该问题中若将无限长圆柱体沿着它的轴线转任意角度，由于是均匀带电的，旋转后整个系统的电荷分布是没有任何变化的，因此均匀带电的无限长圆柱体所带电荷是轴对称分布的，所激发的电场也应是轴对称分布的。

【解】设沿圆柱轴向单位长度带电量为λ，由于电荷分布是轴对称的，因此电场分布也是轴对称的。过场点P作一个与圆柱共轴的圆柱形闭合高斯面S，柱高为h，底面半径为r。由对称性易知在闭合圆柱面的曲面上各点的E的大小处处相等，方向与曲面正交，所以通过圆柱体曲面的电通量为$2\pi rhE$，通过圆柱体两底面的电通量为零，因此整个闭合面S的电通量为$\Psi_E=2\pi rhE$

若场点P位于圆柱体之外（r>R），则闭合面内所围的电荷量为λh，由高斯定理可得：$2\pi r\hbar\ E=\frac{\lambda\hbar}{\varepsilon_0}$

则P点的$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

若场点P位于圆柱体内（r<R），由于电荷均匀分布在整个圆柱体内，则闭合面S所围的电荷量为$q=\frac{\lambda\hbar\ \pi r^2}{\pi R^2}=\frac{\lambda\hbar\ r^2}{R^2}$，由高斯定理有：$2\pi r\hbar\ E=\frac{\lambda\hbar\ r^2}{\varepsilon_0 R^2}$

则P点的$E=\frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$

二、用对称性思想解决稳恒磁场问题

在电场的学习中，大部分学生可能还不觉得电磁学学习有多难，但当他们接触了磁场部分的内容时可能就不觉得学习电磁学是一件简单的事情了。因为在电场部分大多计算比较简单，矢量的运用往往也只涉及到矢量的点乘问题，很少涉及较难的矢量叉乘运算，但在磁场部分会有频繁的矢量计算，特别是叉乘的计算，这对学生计算的要求提高了档次。我们用毕奥－萨伐尔公式：$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Idl\times e_r}{r^2}$来计算磁感应强度，在使用这个公式计算时，我们要运用微元的思想，且由于涉及到矢量的积分，还需对矢量进行分解成分量来进行积分。但计算B还有一个公式，安培环路定理$\oint\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0\sum I$，乍一看这个式子也要进行矢量积分运算，同样复杂。但当磁场具有高度对称性时，我们运用对称性思想，可以简化该公式的运算。下面通过一个典型的例子[3,4]来阐述如何利用对称性思想来求解磁感应强度。

稳恒磁场呈轴对称分布

一根长直流导线，通有恒定电流I，求导线所激发的磁感应强度。

【分析】我们发现该体系与均匀带电的无限长圆柱体很相似，前者通有恒定电流，后者均匀带电，导线相当于圆柱底面半径无限小的情形，因此该体系的磁场也呈轴对称分布。通过下面的操作我们很容易理解这一点，对体系旋转任意角度，电流的分布没有发生任何变化，因此所激发的B不会改变，磁场分布同样是轴对称分布的。

【解】由对称性可知通有恒定电流的长直流导线所激发的磁感应强度是轴对称分布的，磁感应强度B的大小只与场点P到导线的距离有关，所形成的磁感应线实际上是一组以导线为中心的同心圆，取过P点，半径为r的圆形闭合回路，在这个回路上的B的大小都是相等的，且闭合回路上任一点的B的方向与该处的dl的方向一致，所以B的环流为：$\oint\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=B2\pi r$ (2)

穿过闭合回路的电流为I，由安培环路定理得：$B2\pi r=\mu_0 I$

即可求出$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$。

三、用对称性思想解决电磁感应问题

在磁场部分的学习中，我们知道通电的导线能够产生磁场，也就是电能生磁，那反过来磁能否生电？磁生电的规律由法拉第定律来表示，即$\int\boldsymbol{E}_k\cdot d\boldsymbol{l}=-\frac{d}{dt}\int\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$，我们也可以运用对称性思想将这个复杂的积分运算进行简化。通过一个典型的例子[3,4]来说明如何利用对称性思想解决电磁感应的问题。

感应电场的轴对称分布

半径为R的无限长螺线管内的磁场B随时间作线性变化（dB/dt= 常量）时，求管内外的感生电场。

【分析】无限长螺线管很明显是具有轴对称分布的，将无限长螺线管沿着轴线方向旋转任意角度，磁场分布是不会发生改变的，所激发的感生电场也一定是轴对称分布的，且所激发的感生电场E_i只与场点到轴线的距离有关。

【解】由于场的对称性，变化的磁场所激发的感生电场的电场线在管内外都是具有轴对称性的，都是与螺线管同轴的同心圆，而E_i的方向是圆的切线的方向，且同一条电场线上E_i的大小处处相等。选任一电场线作为闭合回路，回路中的磁通量变化完全是由磁场变化引起的，法拉第电磁感应定律为：$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\int\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\cdot d\boldsymbol{S}$，此时根据该式可以求出离轴线 r 处的感生电场$E_i$的大小为：

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=E_i\oint dl=2\pi rE_i=-\int\frac{d\mathbf{B}}{dt}\cdot d\mathbf{S}\ (3)$$

如果场点位于螺线管内时，即 r<R，选回路所围圆的面积为积分面，在这个面上各点的$\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$相等且和面法线的方向是平行的，因此法拉第定律右边的面积分为：$\int\frac{d\mathbf{B}}{dt}\cdot d\mathbf{S}=\int\frac{dB}{dt}dS=\pi r^2\frac{dB}{dt}$

可得内部的感生电场$E_i=-\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$

如果场点位于螺线管外时，即 r>R，法拉第定律右侧的面积分包含整个螺线管的截面，由于只有螺线管内部的$\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$不为零，有：$\int\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\cdot d\boldsymbol{S}=\pi R^2\frac{dB}{dt}$

可得外部的感生电场$E_i=-\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}$

四、讨论

上面的几个例子均为电磁学中静电学、静磁学、电磁感应部分的典型问题，不难发现电磁学中涉及到的公式都是比较复杂的，但对于具有高度对称性的体系，基于对称性思想充分分析体系的对称性，将复杂的多重积分化为简单的积分。我们用公式来处理电磁学问题时，需要建立封闭曲面或者闭合曲线，而对于一般的封闭曲面和闭合曲线的积分是很难计算的，但如果整个体系具有一定的对称性，同时选取的封闭曲面和闭合曲线也是一个对称性结构的话，这会大大简化计算。那我们如何发现体系具有某种对称性呢？实际上这才是最困难的问题，如果我们看不出来一个体系有没有对称性，当然无法基于对称性思想来简化积分的计算。而通过以上的讨论，不难发现，我们总是可以通过将体系绕轴、沿面或点旋转的方法来判断体系会不会发生改变，从而判断其对称性。总之，对称性思想是一个及其重要的思想，不仅在电磁学问题中有广泛的应用，而且也在力学、光学、固体物理学等其他物理分支学科中也有重要应用。因此，我们在面对物理问题时，应多考虑是否可以采用对称性思想来分析问题。

结语

本文以电磁学中一些典型的物理问题为例探讨了对称性思想在电磁学问题上的应用，阐述了如何利用对称性思想来进行复杂积分的简化计算，也说明了在解决具有一定对称性系统的电磁学问题的基本思路和基本方法，通过上面的讨论我们可以看出，对称性思想是我们物理学的基本思想之一，这一思想贯穿了我们整个电磁学的学习之中，运用对称性的角度出发分析和解决问题，是解决电磁学问题的一种惯用方法和重要手段。因此教师在平常的教学中，应该重视对一些物理问题的对称性思想的分析，可以通过对一些具体的物理学中的相关事实来说明对称性思想的巧妙性，引导学生感受物理中的对称之美[1,2]。总之，通过对大学物理知识的学习，我们不能只停留在学会知识和学会做题的应试教学上面，而要教会学生从物理学习中多多去体会一些思想和方法，学会如何可以将一个复杂的问题简单化，不仅要让学生掌握好基本的物理知识，同时也要提高学生分析问题和解决问题的能力，让学生能够更好地理解物理规律。

参考文献

[1] 郭虎平 . 对称性在物理中的应用 [J]. 科技风，2023(11):160-162.

[2] 王红艳 . 对称性 -- 开启物理学理论思想的钥匙 [J]. 淮北煤师院学报(自然科学版),2001,22(4):74-76.

[3] 赵凯华，陈熙谋 . 电磁学 [M]. 高等教育出版社，2011.

[4] 程守洙，江之永 . 普通物理学 [M]. 高等教育出版社，1998.

作者简介：何紫茹（2003-），女，汉族，湖南湘潭，现就读于湖南科技大学。