高中数学导数在解答各类问题中的应用

肖毅

江西省吉安市遂川县燕山中学

摘　要：在高中数学中学生学习导数的定义、性质和计算方法，掌握了导数的基本概念后，就可以利用导数解答各类问题。导数在解决实际问题中的应用是非常广泛的，比如在物理学、经济学、工程学等领域都有着重要的作用。基于此，本文章对高中数学导数在解答各类问题中的应用进行探讨，以供相关从业人员参考。

关键词：高中数学导数；解答；各类问题；应用

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2024.08.084

引言

导数作为微积分的基础概念之一，在高中数学教学中占据着重要的地位。导数的概念直观地描述了函数在某一点处的变化率，能够帮助我们研究函数的性质和行为。在解答各类问题时利用导数的方法可以使问题更加简洁明了，也更便于进一步地分析和推导。

一、导数的基本概念

导数是微积分中的一个重要概念，描述了函数在某一点处的变化率。在数学上导数表示函数在某一点处的切线斜率，即函数曲线在该点的局部变化情况。导数可用极限的方式定义，即函数值随自变量变化非常小时的变化率。导数包括瞬时变化率、斜率和速度等，当函数在某一点的导数存在时，函数在该点处是光滑连续的，并且可以用线性函数逼近。导数的求解涉及到极限的概念，可以通过求导数来研究函数的单调性、凹凸性、最值等性质，也可以应用到物理、经济等实际问题中。

二、高中数学解题中应用导数的现状

（一）计算错误

在高中数学解题过程中，特别是在应用导数的问题中，计算错误是一个常见且困扰学生的问题。这种错误源自于疏忽、粗心或者计算能力不足等原因。在求导的过程中，涉及到多项式的求导、链式法则、乘法法则、除法法则等运算，需要反复进行代数运算和求极限的操作。由于繁杂的运算过程和细致的步骤，学生在考试或作业中容易出现漏写、符号混淆、计算错误等情况。当函数形式复杂、包含多项式、三角函数、指数函数等部分时，学生会在运算过程中出现弄错相似函数的导数、乘除错误、忽略链式法则等常见误区。导数计算中的小细节也容易被忽视，比如忽略常数项的导数、忘记对指数项进行求导等。这些细微的计算错误会导致整个求导过程的错误，进而影响最终的答案正确性。

（二）理解偏差和思维定势

这种偏差源自学生对导数概念的模糊理解，只停留在符号操作和公式套用的层面，而缺乏对导数背后含义和几何意义的把握。缺乏深入理解导致学生在解决复杂问题时出现认知偏差和思维定势。对导数的表面性理解使学生只关注导数的计算方法，而忽视导数背后的物理意义和几何直观图像。导数不仅是函数在某点的变化率，更能够表达曲线的斜率和切线方程。而如果学生只对导数的代数运算有所了解，缺乏对导数曲线的几何意义感知，就难以从整体上理解导数的作用以及其应用。一些学生容易在解题时陷入思维定势，无法灵活运用导数的性质和特点。缺乏深刻的理解导致学生对问题的死板看法，无法跳出固有模式思考，难以发现问题的多样解题路径。尤其在涉及最值、单调性和曲线特性等问题时，若不能从几何意义上理解导数的应用，就难以正确分析问题，影响解题效果。

三、高中数学导数在解答各类问题中的具体应用

（一）在求解函数最值中的应用

函数的最值问题是指找到一个函数在给定的定义域内取得最大值或最小值的点或值，这种问题在实际生活中经常遇到，比如在经济学中研究利润最大化问题、在物理学中研究运动物体的最高或最低点，都需要运用导数来解决。在求解函数的最值问题时需要找到函数的关键点，即导数为零或不存在的点，这些关键点可能是函数的最值点，但不一定是最值点，还需要进一步判断。通过导数测试来判断这些关键点是否是函数的最值点，具体做法是计算关键点的导数，判断导数的正负来确定最值点的类型。当导数从正变负时，说明函数由增到减，意味着函数取得了极大值；而当导数从负变正时，说明函数由减到增，意味着函数取得了极小值。在具体应用中经常会遇到各种形式的函数，对于这些函数可以利

用导数的性质和求导法则来求解最值问题。对于多项式函数，我们可以利用导数的零点和符号变化来确定最值点；对于指数函数和对数函数，我们可以运用导数和对数函数的单调性来判断最值点的位置。

例如，已知函数 f（x）$=e^x-ax>0$，此函数的极小值是 g（a），求解 g（a）的最大值。根据已知条件求出函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$，对于指数函数 e^x 其导数仍然是 e^x；对于一次函数 $-ax$ 其导数是 $-a$，所以 $f'(x)=e^x-a$。令 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln(a)$，当 $x=\ln(a)$ 时函数 $f(x)$ 达到了极小值。将 $x=\ln(a)$ 代入函数 $f(x)$，得到 $g(a)=f(\ln(a))=e^x\ln(a)-a*\ln(a)=a-\ln(a)$，因此 $g(a)=a-\ln(a)$ 为 $f(x)=e^x-ax>0$ 的极小值，要求 $g(a)$ 的最大值，需要对 $g(a)$ 进行求导。再次计算 $g(a)$ 的导数 $g'(a)$，我们有 $g'(a)=1-1/a$。令 $g'(a)=0$，解得 $a=1$。所以，$g(a)$ 在 $a=1$ 时取得最大值。

（二）在圆锥曲线解题中的应用

在解题中导数的应用可以帮助我们求解椭圆的切线方程和法线方程，切线方程的斜率可以通过导数求取，然后利用已知切点的坐标和斜率可以得到切线方程；法线方程则可以通过切线的斜率求倒数得到，再利用已知切点的坐标即可得到法线方程。在解题中导数的应用可以帮助我们求解双曲线的切线方程和法线方程，类似于椭圆，切线的斜率可以通过导数求取，然后利用已知切点的坐标和斜率可以得到切线方程；法线方程可以通过切线的斜率求倒数得到，再利用已知切点的坐标即可得到法线方程。在解题中导数的应用可以帮助我们求解抛物线的切线方程和法线方程，同样也是类似思路，通过求导可以得到切线方程的斜率，然后利用已知切点的坐标和斜率可以得到切线方程；法线方程可以通过切线的斜率求倒数得到，再利用已知切点的坐标即可得到法线方程。

例如，如图 1 所示，两条直线的距离为 4，且都和 y 轴平行，其与抛物线 $y^2=-2px$（$0<p<14$）和圆 $(x-4)^2+y^2=9$，分别交于 AB 和 CD，且抛物线的准线和圆相切，则当 $|AB|\cdot|CD|$ 取得最大值时，直线 AB 的方程为（　）。

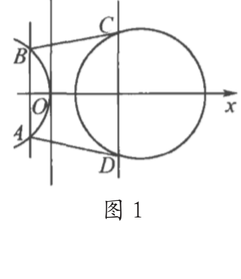

图 1

设直线的方程为 $y=k$，其中 k 为常数。由题意可知直线与抛物线 $y^2=-2px$ 相交，代入直线方程得 $k^2=-2px$，即 $x=-k^2/2p$。又由题意可知，直线与圆 $(x-4)^2+y^2=9$ 相交，代入直线方程得 $(k-4)^2+k^2=9$，即 $k^2-8k+16+k^2=9$，化简得 $2k^2-8k+7=0$，解得 $k=\sqrt{3}$ 或 $k=2-\sqrt{3}$。因为直线与 y 轴平行，所以直线的方程为 $y=\sqrt{3}$ 或 $y=2-\sqrt{3}$。设直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}$，直线 CD 的方程为 $y=2-\sqrt{3}$。AB 和 CD 的长度为 $|AB|=4/\sqrt{3}$，$|CD|=4/(2-\sqrt{3})$。则 $|AB|\cdot|CD|=16/(3-2\sqrt{3})$，要使这个乘积最大，即要使 $3-2\sqrt{3}$ 最小。由于 $3-2\sqrt{3}=\sqrt{3}-1$ 的平方，所以最小值为 1，此时直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}$，即 $x=-\sqrt{3}$。因此，直线 AB 的方程为 $x=-\sqrt{3}$。

（三）在解决立体几何问题中的应用

导数在解决立体图形的最优化问题中发挥着重要作用，当需要确定某个几何体的最大或最小体积、表面积时，可以通过建立相应的函数并求导来进行分析，利用导数求解这些函数的极值点可以帮助我们找到最优解，从而解决立体几何中的优化问题。在解决立体几何问题中常常需要确定某一点处曲面的切线方向或法向量方向，通过求取该点处曲面方程的偏导数，可以得到切线的斜率，并进一步推导出切线方程和法向量，为解决立体几何问题提供必要的辅助信息。在立体几何中需要研究曲线的弯曲程度和曲率情况，以便更好地理解曲线的走向和特性。通过对曲线参数方程求导，可以得到曲线的切向量和法向量，从而计算曲率和切向加速度，帮助我们理解和分析立体曲线的弯曲情况。通过灵活运用导数的概念和技巧可以更深入地理解立体几何中的各种问题，并有效地解决这些问题。

例如，在设计仓库时，仓库需要设计上下两个部分，上面部分是四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$，下面部分是正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，如图 2 所示，要求四棱柱的高 O_1O 是正四棱锥的 PO_1 的 4 倍。（1）如果 $AB=6$m，$PO_1=2$m，那么仓库的容积是多少？（2）如果正四棱锥的侧棱长是 6m，当 PO_1 是多少时，仓库的容积达到最大？

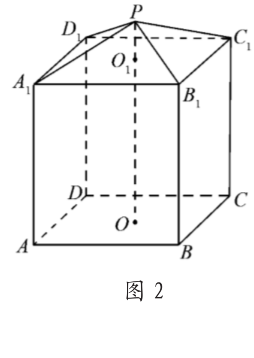

图 2

(1) 仓库的容积可以分成上下两部分的容积相加得到，分别计算正四棱锥和正四棱柱的容积：

正四棱锥的容积 $_1$=(1/3)*S_1*PO_1，S_1 为正四棱锥底面积，即 S_1=(1/2)*AB*PO_1=(1/2)*6*2=$6m^2$ 所以，$_1$=(1/3)*6*2=$4m^3$。

正四棱柱的容积 $_2$=S_2*PO_1，S_2 为正四棱柱底面积，即 S2=AB*AB=6*6=$36m^2$，得 $_2$=36*4=$144m^3$。

所以，仓库的容积为 =$_1$+$_2$=4+144=$148m^3$。

(2) 仓库的容积 =$_1$+$_2$=(1/3)*S_1*PO_1+S_2*PO_1

对求导数，并令导数等于 0，即可求得 PO_1 的最优值:

d/dPO_1=(1/3)*S_1-S2=0

(1/3)*(1/2)*6*PO_1-36=0

PO_1=6m

所以，当 PO_1=6m 时，仓库的容积达到最大。

四、高中数学导数在解答各类问题应用中的注意事项

（一）确保对导数的概念和性质有充分理解

在应用导数解答问题之前，需要理解导数的计算方法，对于基本函数如多项式、指数、对数和三角函数等，需要掌握它们的导数表达式。理解导数的定义和几何意义，即导数是函数图像切线斜率的极限值，可以看作是函数图像在该点附近的局部线性近似。熟悉导数的基本性质，如常用导数的运算规则、导数的性质（如连续性、间断性）以及高阶导数等。在进行导数计算时注意导数的定义范围，确保导数计算的合理性。细心准确地计算可以避免错误和误差。在应用导数解决实际问题时，需要将问题转化为数学语言，建立相应的数学模型，这就要求对导数的概念和性质有清晰的理解，能够准确地把握问题的本质和关键。

（二）注意运用导数的不同技巧

在解答各类问题时，需要掌握导数的不同技巧和方法，以提高求解效率和准确性。求导法则是导数计算的基本工具，包括常数法则、幂函数法则、指数函数法则、对数函数法则等。掌握这些法则，对于常见函数的导数计算会更加轻松。链式法则应用于复合函数的导数计算，通过将复合函数分解为内外函数，然后使用导数法则逐层计算。隐函数求导法适用于含有隐含变量的方程，通过对每个变量进行偏导数计算。参数方程求导法则主要用于曲线的导数计算，通过将函数转化为参数形式进行求导。当解决问题时重要的是选择合适的导数技巧和方法，这就要求我们熟悉常见函数的导数表达式，并能识别出复合函数、隐函数或参数方程等特殊情况。

（三）注意审题和建立数学模型

建立数学模型是将现实问题抽象为数学问题的过程，这是应用导数解决实际问题的关键一步。在面对实际问题时，需要将问题转化为数学语言，找出问题中涉及的变量、关系和约束条件，建立相应的数学模型。这一过程需要灵活运用数学知识，包括函数关系、方程求解、导数应用等，并结合问题背景和条件确定相应的数学表达式，形成有效的数学模型。只有建立准确合适的数学模型，才能利用导数工具进行求解，并得出符合实际的结论。在解答实际问题时审题并建立数学模型是至关重要的步骤，通过正确审题可以避免在解题过程中偏离问题本质，通过建立数学模型可以将问题转化为可计算的数学表达式，为应用导数解答问题奠定良好基础。

结语

综上所述，导数作为一种强大的数学工具，在解决各类问题中都发挥着不可替代的作用。通过对导数的实际应用进行分析，我们可以看到导数在各个领域的重要性和实用性。在学习和应用导数的过程中需要注重理论知识的学习，同时也要注重实际问题的练习和解决。希望本文所述的导数应用案例能够帮助读者更深入地理解导数的意义，并在实际问题中灵活运用导数这一工具，提升解决问题的能力和水平。

参考文献

[1] 王旭俐 . 导数法在高中数学解题中的有效应用 [J]. 高中数理化 ,2021,(S1):5.

[2] 张王文 . 高中数学导数的试题分析和教学对策 [J]. 高考 ,2021,(36):22-24.

[3] 刘强 . 导数在高中数学解题中的应用探究 [J]. 理科爱好者 (教育教学),2021,(06):142-143.

[4] 黄龙孙 . 高中数学导数的解题应用 [J]. 数理化解题研究 ,2021,(34):54-55.

[5] 陈振权 . 高中数学中导数解题教学策略研究 [J]. 试题与研究 ,2021,(31):26-27.

[6] 刘文娟 . 浅析导数在高中数学函数中的应用 [J]. 中国多媒体与网络教学学报 (下旬刊),2021,(01):241-242.