

SM Solver 应用于位移法求解内力的演算

屈慧琼 刘华良*

韶关学院化学与土木工程学院

摘要: 文章以位移法求解超静定结构内力为例, 阐述了如何将 SM Solver 应用于位移法求解超静定结构内力的演算。通过案例展示, 证明了 SM Solver 软件在结构力学教学中的重要性, 可用于高校土木专业结构力学教学和考研辅导。SM Solver 辅助结构力学教学有助于激发学生学习兴趣, 培养学生自主学习能力, 提高学习效率。

关键词: SM Solver; 结构力学; 内力计算; 位移法; 超静定结构

【DOI】 10.12252/j.issn.2096-6288.2024.08.132

引言

结构力学是土木工程及相关专业必修的一门重要学科基础课程, 它既是前续高等数学、大学物理、理论力学及材料力学等课程的深化和延伸, 又是后续结构设计原理、钢筋混凝土结构、钢结构等专业课程的基础, 也是土木类研究生入学考试的重要考试科目, 在土木类人才培养体系中具有举足轻重的地位^[1]。

为了辅助结构力学课程教学, 清华大学袁驷教授主持研发出结构力学求解器 (Structural Mechanics Solver, 简称 SM Solver), 这是一款面向师生和工程技术人员的计算机辅助分析计算软件^[2-5], 能够解决结构 (体系) 的几何组成, 静定和超静定结构内力和位移, 影响线、自由振动、弹性稳定、极限荷载等经典结构力学所涉及的一系列问题^[2-5]。该软件界面友好、功能完备, 被广泛使用于师生教学^[2-5], 也被许多工程技术人员用于各类结构设计、计算、验算^[6-9]。

为了激发学生学习结构力学的兴趣, 提高学生自学效率和质量, 帮助学生开展结构力学考研复习, 本文以位移法求解平面超静定刚架的内力为例, 介绍结构力学求解器 v2.6.1 在辅助解决结构力学问题中的作用。

一、超静定结构内力计算问题

位移法是结构力学中极为重要的分析方法, 采用位移法求解超静定结构内力是土木类大学生必须掌握的重要知识, 也是《结构力学》课程考试和研究生入学考试的必考题型。

为了阐述清楚如何实现结构力学求解器辅助解决结构力学问题, 本文以参考文献 [10] 中例题 7-1: “求解一平面超静定刚架受到静力荷载作用下的内力” 为例。其题目如下: 已知图示超静定刚架, 梁和柱的抗弯刚度分别为 EI_1 和 EI_2 , 且 $EI_1:EI_2=2:1$ 。左柱承受均布荷载 $q=10\text{kN/m}$, 求分别用力法和位移法作刚架的内力图^[10]。

二、位移法的基本原理与过程

静定结构的内力通过静力平衡条件即可求解, 而超静定结构的内力需要考虑静力平衡、物理和几何条件^[10]。为简化计算, 通常选取超静定结构的部分未知量作为基

本未知量求解, 从而表示其他未知量为基本未知量的函数来得出结果^[10]。超静定结构内力计算方法可分为力法和位移法两类, 前者以某些力为基本未知量, 后者以结构的位移为基本未知量。这两种方法形式相似, 但实质不同, 初学者易混淆。

位移法有三假定: (1) 忽略轴向变形影响; (2) 弯曲变形微小; (3) 剪切变形对位移影响忽略。位移法求解超静定结构内力通常包括以下步骤:

1. 选取位移未知量

选择位移未知量: 以结构节点位移为基本未知量, 包括独立的节点角位移和线位移。节点角位移数等于刚结点数; 线位移数由铰化法确定, 即把刚架所有刚结点 (包括固定支座) 都改为铰结点, 如果体系变成几何可变体系, 则使它变为几何不变体系所需添加的链杆数目即等于原结构的独立线位移数目。

以本例题举例说明: 原结构有一个刚结点 D, 该点有一个节点角位移。将所有刚结点改为铰结点, 得到几何可变体系。添加水平活动铰支座使其成为几何不变体系, 原结构在 CD 连线方向上有一个水平线位移。原结构有两个位移未知量, 一个为 D 点角位移, 一个为 CD 连线方向线位移。

2. 确定基本体系

在原结构的独立位移结点上添加附加约束, 得到基本结构。基本结构在荷载和基本未知量作用下形成原结构的基本体系。例如, 本文例题的基本结构和体系如图 1 所示。位移法确定结点角位移和线位移作为基本未知量, 因此基本结构和体系形式唯一。

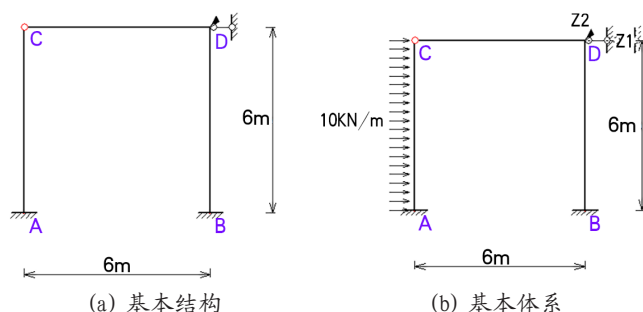


图 1 超静定刚架的位移法基本结构和基本体系

3. 建立基本方程（组）

对于具有 n 个独立结点位移的结构，可在相应位移位置加上 n 个附加约束（角位移加附加刚臂，线位移加附加链杆），形成基本结构。基本结构加原荷载和 n 个基本未知量（位移）构成原结构的基本体系。根据静力平衡条件，基本体系在各结点位移和荷载作用下，每个附加联系上的约束力均为 0，可列出 n 个独立平衡方程：

$$\sum_{i=1}^n k_{ij} \Delta_j + F_{iP} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

式中， k_{ij} 称作刚度系数，等于基本结构在单位位移 $\Delta_j = 1$ 单独作用下沿 i 方向产生的附加约束力（矩），且 k_{ij} 与 k_{ji} 数值相等； F_{iP} 称作自由项，等于基本结构在给定的外部荷载单独作用下沿 i 方向产生的附加约束力（矩）。

4. 计算系数和自由项

查结构力学教材中的形常数和载常数表可分别得到刚度系数 k_{ij} 和自由项 F_{iP} ，此处不再赘述。

5. 解方程（组），算出未知量

按照第 4 步计算出方程（组）中的各刚度系数 k_{ij} 和自由项 F_{iP} ，并代入到式（1）的方程（组），即可求出各未知力 Δ_j 。

6. 绘出结构内力图

采用叠加法，最终原超静定结构的内力等于各未知量 Δ_j 和给定的外部荷载在基本结构上所产生的内力之和，即：

$$M = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i \Delta_i + M_P \quad (2)$$

$$F_S = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{Si} \Delta_i + F_{SP} \quad (3)$$

$$F_N = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{Ni} \Delta_i + F_{NP} \quad (4)$$

三、结构力学求解器辅助求解

按照结构力学求解器的建模顺序构建本文例题的力学模型，因结构力学求解器采用数值精确求解方式，不支持符号运算，为了计算方便，在此直接将 EI_2 赋值为 1，则 $EI_1:EI_2=2:1=2$ ，忽略轴向和剪切变形影响，其他参数按照给定数值输入，得到例题的位移图和弯矩图如图 2 所示。

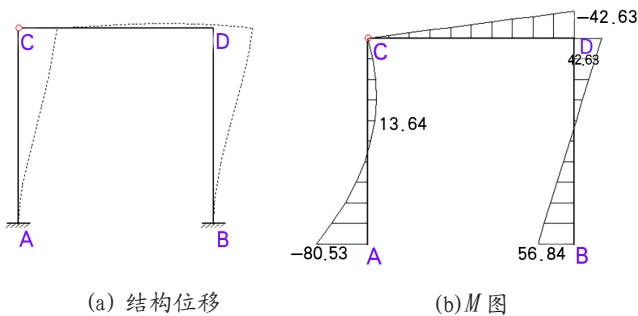


图 2 超静定刚架的位移及内力图

从图 2 可以看出，通过结构力学求解器建模分析，可以快速获取结构内力和位移，有助于自学者和考研复

习者验证答案准确性，辅助学习结构力学。然而，仅有计算结果，缺乏分析过程和步骤，无法深入帮助学习者理解和解决问题。因此，本文将详细说明如何使用求解器根据问题演算式解决结构力学问题。

1. 确定位移未知量

确定结点位移数目是解决超静定结构内力的首要步骤。位移数目一旦错误，后续求解将失去意义。通过求解器构建力学模型（如图 3 所示），在“编辑器”窗口选择“求解”下拉菜单中的“位移计算”按钮，可得出例题模型的位移图（见图 2（b））。C、D 结点水平线位移相同，D 结点有角位移，CA 和 CD 杆的 C 端有角位移。由于 C 结点为铰，两角位移不需考虑，结构仅有 2 个结点位移：D 结点角位移和 CD 方向线位移。因此，通过求解器分析位移可确定结构的结点位移数目。

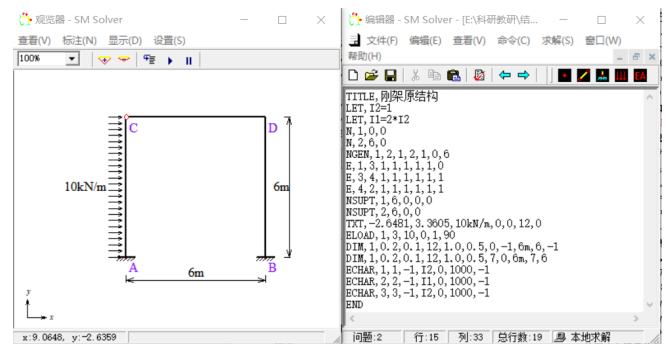


图 3 例题力学模型

2. 确定基本体系

在确定了结点位移未知量的数量和位置后，对原结构的 D 结点进行改动，加上刚臂和沿水平方向的 CD 杆，形成一个新的基本结构，即原结构的基本体系（见图 1（a））。在求解器中建立该基本结构的力学模型后，对基本结构施加水平链杆上的未知水平线位移 Δ_1 和 D 结点上的未知正向转角位移 Δ_2 ，同时施加外部荷载，形成原结构的基本体系（见图 1（b）），并在求解器中建立该基本体系的力学模型。

3. 建立基本方程（组）

依据基本体系在各结点位移和荷载共同作用下每个附加联系上的约束力（约束反力或反力矩）都等于 0 的静力平衡条件，在本例题中，便可列出 2 个独立的平衡方程：即

$$\begin{cases} k_{11} \Delta_1 + k_{12} \Delta_2 + F_{1P} = 0 \\ k_{21} \Delta_1 + k_{22} \Delta_2 + F_{2P} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

4. 计算系数和自由项

为了确定式（5）中刚度系数和自由项的具体数值，可在基本结构力学模型的基础上单独加上 $\Delta_1 = 1$ 、 $\Delta_2 = 1$ 和外荷载作用，在求解器中建立相应力学模型，求得附加刚臂和附加链杆上的约束反力矩和约束反力（见图 4）。需注意，由于结构力学求解器无法进行符号运算，

因此通常将 EI_2 设为 1, 导致刚度系数和自由项中不含 EI_2 。在计算时可手动乘以 EI_2 , 但不乘也不影响方程求解。

$$k_{11} = 5/3, k_{12} = k_{21} = -1/6, k_{22} = 5/72, F_{1P} = 0, F_{2P} = -22.5.$$

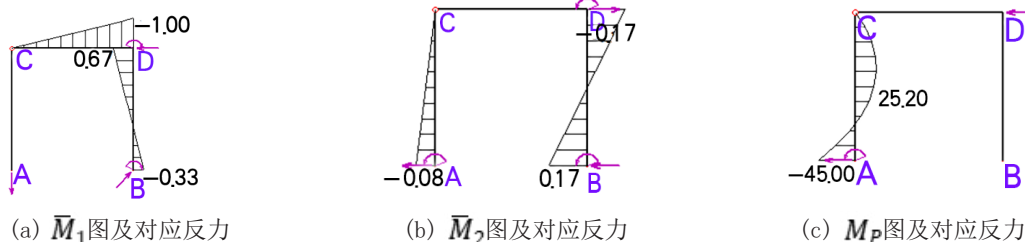


图 4 例题基本结构在 $\Delta_1 = 1$ 、 $\Delta_2 = 1$ 和外荷载单独作用下内力及反力

表 1 $\Delta_1 = 1$ 、 $\Delta_2 = 1$ 和外荷载作用下基本结构的附加反力(矩)

荷载因素	刚臂上附加反力矩	链杆上附加反力
$\Delta_1 = 1$ 作用	5/3	-1/6
$\Delta_2 = 1$ 作用	-1/6	5/72
外荷载作用	0	-22.5

5. 解方程(组), 算出未知量

将第(4)步计算出的方程组中的各系数和自由项代入到方程组(5), 得出方程组, 可求出未知位移 Δ_1 和 Δ_2 , 即

$$\begin{cases} \Delta_1 = \frac{810}{19} \\ \Delta_2 = \frac{8100}{19} \end{cases} \quad (6)$$

6. 绘出结构内力图

采用叠加法, 将第(5)步算出的 X_1 和 X_2 代入式(2), 即得到原超静定结构的弯矩(见图 3(c)), 其结果与参考文献[10]中答案完全一致。原超静定结构的剪力和轴力亦可以同法算出, 在此省略。

结语

本文运用结构力学求解器进行位移法求解超静定刚架内力的演算。通过实例演算表明, 利用 SM Solver 建立超静定刚架模型可帮助学生确定结构结点位移位置和数量。在位移节点增加附加刚臂或链杆, 并适当调整, 可得到基本结构和体系, 建立基本结构在不同位移和外荷载作用下的力学模型。这有助于学生确定解方程组的刚度系数和自由项值, 从而轻松应用位移法求解超静定结构内力。SM Solver 作为辅助工具在结构力学教学中具有可行性, 激发学生学习兴趣。充分利用该功能可提高高校土木专业学生结构力学自学和考研复习效率与质量。使用时需注意求解器基于数值精确计算而非符号运算, 因此在力学建模时需为符号参数适当赋值。

参考文献

[1] 刘娟, 徐爽, 付春等. 应用型人才培养模式下

此外, 约束反力矩和约束反力也可直接从各计算模型中求解导出, 结果列于表 1, 包括各系数和自由项。

课程教学改革探讨——以结构力学课程为例[J]. 大学教育, 2022(08): 74-76.

[2] 阿斯哈, 时金娜. 结构力学求解器在“结构力学”课程中的应用研究[J]. 科技风, 2024, (07): 136-139.

[3] 崔恩文. 结构力学求解器在高职院校《建筑力学》教学中的应用[J]. 房地产世界, 2022(21): 99-101.

[4] 欧永健. 结构力学求解器在中职《土木工程力学基础》课程中应用与思考[J]. 安徽建筑, 2020, 27(06): 139-140.

[5] 郑元锋. 结构力学求解器在力学与结构中应用探讨[J]. 湖南工业职业技术学院学报, 2020, 20(02): 13-18.

[6] 屈恩相, 李文月, 李聪, 等. 结构力学求解器在对称刚架结构中的应用[J]. 山东工业技术, 2023, (04): 15-20.

[7] 于方舟, 刘屹然, 李栋, 等. 基于有限元和结构力学求解器方法的光伏固定支架结构承载力分析[J]. 电工技术, 2022, (20): 61-64.

[8] 张新红, 伊亚辉, 冯超, 等. 结构力学求解含有轴向载荷的超静定梁的解析法[J]. 内江科技, 2022, 43(08): 33-35.

[9] 赵宏飞, 赵亮, 陈方华等. 运用结构力学求解器确定大型设备运输中鞍座位置[J]. 工程机械与维修, 2020(S1): 147-151.

[10] 吕恒林, 鲁彩凤, 张莹莹, 等. 结构力学(上册)[M]. 第二版. 北京: 中国建筑工业出版社, 2021.

作者简介: 屈慧琼, 1981年, 女, 湖南人, 博士, 韶关学院讲师, 研究方向为环境与矿业工程。

基金项目: 教育部产学合作协同育人项目(220901867293724), 广东省高等教育教学改革项目(粤教高函[2024]9号-964), 韶关学院教改项目(SYJY20231002), 韶关学院课程思政建设项目(韶院党政办[2023]16号-23), 韶关学院科研启动基金(99000629), 韶关学院“质量工程”建设项目(韶学院[2021]37号-64)。