浅谈元素法在多元函数积分学中的应用

李海涛

江苏师范大学科文学院文理学院

摘　要： 积分学是数学领域中的一个重要分支，广泛应用于物理、工程、经济等多个领域。在多元函数积分学中，由于涉及的变量增多，问题的复杂性也随之增加。因此，如何有效地求解多元函数积分成为了数学工作者和工程师们关注的焦点。元素法作为一种重要的数学方法，在多元函数积分学中发挥了重要作用。为此，本文将元素法应用到重积分、曲线积分、曲面积分教学中，避开了用“和的极限”这种抽象方式给出积分定义，同时还能让学生熟练应用元素法解决一些实际问题，一举两得，事半功倍。

关键词： 元素；变量；积分

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2024.08.086

引言

元素法是《高等数学》中定积分的应用章节中用于求一类量U的方法，所求量U符合下列条件：(1) U是与变量x的变化区间$[a,b]$有关的一个量；(2) U对于区间$[a,b]$具有可加性，就是说如果把区间$[a,b]$分成许多部分区间，则U相应地分成许多部分量，而U等于所有部分量之和；(3) 部分量ΔU_i的近似值可表示为$f(\xi_i)\Delta x_i$。

那么就可以考虑用定积分来表达这个量U．写出这个量U的积分表达式具体步骤如下：

(1) 根据问题的具体情况，选取一个变量例如x为积分变量，并确定它的变化区间$[a,b]$；

(2) 设想把区间$[a,b]$分成n个小区间，取其中任一小区间并记作$[x,x+\mathrm{d}x]$，求出相应于这个小区间的部分量ΔU的近似值．如果ΔU能近似地表示为$[a,b]$上的一个连续函数在x处的值$f(x)$与$\mathrm{d}x$的乘积，就把$f(x)\mathrm{d}x$称为量U的元素且记作$\mathrm{d}U$，即

$$\mathrm{d}U=f(x)\mathrm{d}x\;;$$

(3) 以所求量的元素$f(x)\mathrm{d}x$为被积表达式，在区间$[a,b]$上做定积分，得

$$U=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\;.$$

这就是所求量的积分表达式。

下面将元素法这一重要思想推广并应用到引出二重积分、三重积分、曲线积分、曲面积分的例子中．一般地，如果一个所求量满足条件：

（1）所求量是与一些变量的变化范围有关的量，其中变量的变化范围也称为所求量的分布范围；(2) 所求量关于分布范围具有可加性，就是说如果把分布范围分成许多部分范围，则所求量相应地分成许多部分量，而所求量等于所有部分量之和；(3) 部分量可近似为一个不变量与部分分布范围度量（或部分分布范围度量的近似值）的乘积，则所求量可考虑用元素法写出积分表达式．讲授重积分，曲线积分、曲面积分定义时均可设计一个引例来求某个符合上述三个条件的量，所以可用元素法写出它们的积分表达式。

一、元素法与多元函数积分学概述

（一）多元函数积分学的特点与挑战

1. 特点

多维性：多元函数积分学涉及两个或更多个变量的函数，这些变量共同确定了积分区域。这种多维性使得积分的概念、性质、计算方法和应用都变得更为复杂。

几何背景：多元函数积分与几何图形有密切关系。例如，二重积分表示平面区域的面积，三重积分表示立体空间的体积，而曲线积分和曲面积分则与曲线和曲面的长度、面积相关。

2. 挑战

复杂性：与一元函数积分相比，多元函数积分需要同时处理两个或更多的变量。每个变量都有自己的变化范围和规律，这增加了问题的复杂性和计算量。随着维度的增加，积分区域的形状和边界变得更加复杂。在二维空间中，积分区域可能是一个平面区域；而在三维空间中，它可能是一个立体区域，甚至在高维空间中，积分区域的形状和性质更加难以想象。

理解难度：多元函数积分的几何背景和物理意义相对较难理解，需要学生具备较高的空间想象能力和物理直觉。对于大多数人来说，高维空间是抽象且难以想象的。在理解多元函数积分时，需要具备一定的空间想象能力，能够想象出高维空间中的函数图像和积分区域。

计算技巧：多元函数积分的计算技巧和方法较多，包括变量替换、极坐标变换、分部积分等。掌握这些技巧和方法需要一定的练习和积累。

应用难度：多元函数积分在实际应用中的问题往往更为复杂，需要将问题抽象为数学模型，并选择合适的积分方法进行计算。这对学生的建模能力和计算能力都提出了较高的要求。

（二）元素法的基本概念和原理

元素法（也称为微元法或积分元素法）是一种处理

复杂问题的数学方法，其基本原理是将一个复杂的整体分解为若干个简单的、易于处理的“元素”，通过对这些“元素”进行研究和处理，最后再将它们综合起来以得到整体的性质或结果。在多元函数积分学中，元素法（也称为微元法或分割求和法）是一种非常重要的方法，用于处理具有连续变化的量或具有连续分布的量的问题。这种方法的基本思想是将一个复杂的整体分割成许多微小的部分（或称为“元素”），对每个部分进行单独处理，然后将所有部分的结果累加起来，从而得到整体的结果。

以计算平面区域的面积为例，我们可以将该区域划分为若干个小区域（如矩形、三角形等），然后计算每个小区域的面积，最后将所有小区域的面积相加，得到整个区域的面积。同样地，在计算立体空间的体积时，我们也可以将空间划分为若干个小体积（如长方体、圆柱体等），然后计算每个小体积的体积，最后将所有小体积的体积相加，得到整个空间的体积。这种方法在多元函数积分学中有着广泛的应用，特别是在计算二重积分和三重积分时。在二重积分中，我们首先将积分区域 D 划分为若干个子区域，然后在每个子区域上选择一个代表点，计算被积函数在该点的值与该子区域面积的乘积（即面积元素），最后将所有面积元素相加得到二重积分的值。类似地，在三重积分中，首先将积分区域 Ω 划分为若干个子区域，然后在每个子区域上选择一个代表点，计算被积函数在该点的值与该子区域体积的乘积（即体积元素），最后将所有体积元素相加得到三重积分的值。

二、元素法在各积分引例中的应用

（一）求曲顶柱体的体积——二重积分引例

问题：设有一立体，它的底是xOy面上的闭区域D，它的侧面是以D的边界曲线为准线而母线平行于z轴的柱面，它的顶是曲面$z=f(x,y)$，其中$f(x,y)\geq 0$且在D上连续．这种立体叫做曲顶柱体，求其体积．

应用元素法求解过程：所求立体体积V分布在点(x,y)的变化范围D上，采用与坐标轴平行的直线对D进行分割，从中任取一块小区域记作$[x,x+\mathrm{d}x]\times[y,y+\mathrm{d}y]$，相应于这一小区域的小曲顶柱体积近似于高为$f(x,y)$，底为$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的平顶柱体体积，从而得到体积元素

$$\mathrm{d}V=f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

以$f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$为被积表达式，在闭区域$D$上做积分，便得体积为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

抛开实际意义，把上述形式的积分定义为函数$f(x,y)$在闭区域D上的二重积分。

（二）求分布不均匀的空间物体的质量——三重积分引例

问题：设有一物体占有空间的有界闭区域Ω，它在Ω上任一点(x,y,z)的体密度为$f(x,y,z)$，这里$f(x,y,z)>0$且在Ω上连续，求该物体的质量．

应用元素法求解过程：所求物体质量M分布在点(x,y,z)的变化范围Ω上，采用与坐标面平行的平面对Ω进行分割，从中任取一块小区域记作$[x,x+\mathrm{d}x]\times[y,y+\mathrm{d}y]\times[z,z+\mathrm{d}z]$，相应于这一小区域的小块物体质量近似于密度为$f(x,y,z)$，体积为$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$的分布均匀的长方体物体的质量，从而得到质量元素

$$\mathrm{d}M=f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ .$$

以$f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$为被积表达式，在闭区域Ω上做积分，便得质量为

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ .$$

抛开实际意义，把上述形式的积分定义为函数$f(x,y,z)$在闭区域Ω上的二重积分．

（三）求曲线形构件质量——对弧长的曲线积分引例

问题：设曲线形构件所占的位置在xOy面内的一段光滑曲线弧L上，已知曲线形构件在L上任一点(x,y)处的线密度为$f(x,y)$，这里$f(x,y)>0$且在L上连续，求这构件的质量．

应用元素法求解过程：所求曲线形构件质量M分布在点(x,y)的变化范围L上，设曲线弧段L的方程为$y=\varphi(x)$，在L上任取一小弧段，左端点记为(x,y)，小弧段的长度用点(x,y)处相应的一段切线长度来近似，用此点处的密度$f(x,y)$近似代替该小弧段每点处的密度，切线长记作$\mathrm{d}s$（弧长元素），从而得到小弧段构件质量近似值为$f(x,y)\mathrm{d}s$，即质量元素

$$\mathrm{d}M=f(x,y)\mathrm{d}s\ .$$

以$f(x,y)\mathrm{d}s$为被积表达式，在曲线弧L上做积分，便得质量为

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\ .$$

抛开实际意义，把上述形式的积分定义为函数$f(x,y)$在曲线弧L上对弧长的曲线积分．

（四）求变力沿曲线所做的功——对坐标的曲线积分引例

问题：设一个质点在xOy面内受到力$\boldsymbol{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$的作用，从点$A$沿光滑曲线弧$L$移动到点$B$，其中函数$P(x,y)$与$Q(x,y)$在$L$上连续，求移动过程中变力 F (x,y)所作的功．

应用元素法求解过程：变力作的功W分布在有向曲线弧L上，设曲线弧段L的方程为$y=\varphi(x)$，在L上任取一有向小弧段，起点记为(x,y)，有向小弧段用点(x,y)处相应的有向切线段来近似，有向切线段记作 $\boldsymbol{r}$（有向曲线元），$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(dx,dy)$，用此点处的力$\boldsymbol{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$近似代替小弧段每点处的力，从而得到在有向小弧段上做功近似值为

$\boldsymbol{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$，即功元素

$$\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

以 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 为被积表达式，在有向曲线弧 L 上做积分，便得功为

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y \ .$$

抛开实际意义，把积分 $\int_L P(x,y)dx$ 定义为函数 $P(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标 x 的曲线积分，把积分 $\int_L Q(x,y)dy$ 定义为函数 $Q(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标 y 的曲线积分，而

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y \triangleq \int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

（五）求曲面形构件的质量——对面积的曲面积分

问题：设空间一块光滑曲面形构件 Σ 有连续面密度 $f(x,y,z)$，求这构件的质量．

应用元素法求解过程：所求曲面形构件质量 M 分布在点 (x,y,z) 的变化范围 Σ 上，设曲面 Σ 的方程为 $z=\varphi(x,y)$，在 Σ 上任取一小块，取边界一点记为 (x,y,z)，小块曲面的面积用点 (x,y,z) 处相应的一块切平面来近似，切平面面积记作 $\mathrm{d}S$（曲面面积元素），用此点处的密度 $f(x,y,z)$ 近似代替小块曲面每点处的密度，从而得到小块曲面构件质量近似值为 $f(x,y,z)\mathrm{d}S$，即质量元素

$$\mathrm{d}M=f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

以 $f(x,y,z)dS$ 为被积表达式，在曲面 Σ 上做积分，便得质量为

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S \ .$$

抛开实际意义，把上述形式的积分定义为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分．

（六）流向曲面一侧的流量——对坐标的曲面积分引例

问题：设稳定流动的不可压缩流体（假定密度为 1）的速度场由

$$\boldsymbol{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

给出，Σ 是速度场中的一片有向曲面，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$ 与 $R(x,y,z)$ 都在 Σ 上连续，求在单位时间内流向 Σ 指定侧的流体的质量，即流量 Φ．

传统的高数教材中在给出求解过程之前，往往会先给出特殊情况下的一个求解公式，即当有向曲面为一块平面，其面积记为 A，流体流速为常速 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{n}$ 为平面选定侧的单位法向向量，则流向 $\boldsymbol{n}$ 所指那侧的流量为 $A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$，下面用元素法给出一般情况下的结果．

应用元素法求解过程：流量 Φ 分布在有向曲面 Σ 上，在 Σ 上任取一块小的有向曲面，取边界上一点为 (x,y,z)，小块有向曲面用点 (x,y,z) 处相应的一块有向切平面来近似，小块有向切平面记作 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$（有向曲面元），其大小记为 $\mathrm{d}S$（曲面面积元素），曲面在 (x,y,z) 处的单位法向量 $\mathrm{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 也是切平面在该点处的单位法向量，用此点处的速度 $\mathrm{v}(x,y,z)$ 近似代替流体在小曲面上每点处的速度，从而得到通过小块有向曲面的流量为 $\mathrm{d}S\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}$，即流量元素为

$$\mathrm{d}\Phi=\mathrm{d}S\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}=P(x,y,z)\mathrm{d}S\cos\alpha+Q(x,y,z)\mathrm{d}S\cos\beta+R(x,y,z)\mathrm{d}S\cos\gamma,$$

其中 $\mathrm{d}S\cos\alpha=\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\mathrm{d}S\cos\beta=\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}S\cos\gamma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 分别为有向曲面 Σ 在 yOz，zOx，xOy 面上的投影元素，则流量元素可写为

$$\mathrm{d}\Phi=P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

以 $P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为被积表达式，在有向曲面 Σ 上做积分，便得流量为

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

抛开实际意义，把积分 $\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz$ 定义为函数 $P(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 y,z 的曲面积分，把积分 $\iint_\Sigma Q(x,y,z)dzdx$ 定义为函数 $Q(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 z,x 的曲面积分，把积分 $\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy$ 定义为函数 $R(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 x,y 的曲面积分，而

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+\iint_\Sigma Q(x,y,z)dzdx+\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy$$
$$\triangleq \iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy\text{。}$$

结语

近年来，各高校都在进行着高等数学教学改革，其中理论教学课时数不断压缩，这种情况下如果对照着教材按部就班地讲授多元函数积分的定义，势必影响教学进度．利用元素法讲授上述各积分，既能让学生深入理解元素法，有利于后续一些课程如大学物理等课程的学习，还能避免用“分割、近似、作和、求极限”的方式来定义上述各积分，一举两得，事半功倍。

参考文献

[1] 同济大学数学系．高等数学：上册 [M].7 版．北京：高等教育出版社，2014.7.

[2] 同济大学数学系．高等数学：下册 [M].7 版．北京：高等教育出版社，2014.7.

[3] 张辉，敬斌，王静．元素法在多元函数积分学中的应用 [J]．卷宗，2017,000(009):64-64.

[4] 孟杰．特殊元素法在数学解题中的应用 [J]．初中数学教与学，2017(11):2.

[5] 贾瑞玲，孙铭娟，张冬燕．正交变换在多元函数积分学中的应用及其数学思想方法 [J]．应用数学进展，2022(008):011.

作者简介：李海涛，1981 年，男，硕士研究生，江苏师范大学科文学院文理学院，副教授，研究方向：大学数学教学研究。