隐圆的相关应用

杨煜[1]　陈梅香[2*]

1. 莆田学院数学与金融学院；2. 金融数学福建省高校重点实验室（莆田学院）

摘　要：隐圆问题是高中数学中难度较大的一个跨单元主题，承接于初中的圆，融入了高中的平面向量、解三角形、解析几何等内容，须充分挖掘、发现和利用已知条件找出隐圆，本文从定点定值、动点轨迹、阿氏圆、向量定值、四点共圆五个方面进行论述隐圆的应用。

关键词：隐圆；平面向量；阿波罗尼斯圆；托勒密定理；解析几何

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2024.09.085

引言

圆在初中数学知识是一个重要知识，并与直线融合考查，跨入高中，直线与圆仍然密不可分，也是平面解析几何的重要内容，可以通过函数、向量、三角、圆锥曲线等综合考查，综合性强，难度较大，其中隐圆更是平面解析几何的一大难点。

一、定点定长定隐圆

（一）圆的定义

在平面内，所有到定点的距离等于定长的点的集合叫作圆[1]。

（二）例题剖析

例 1：（2023 湖北鄂州中考），在平面直角坐标系中，O为原点，$OA=OB=3\sqrt{5}$，点C为平面内一动点，$BC=\frac{3}{2}$，连接AC，点M是线段AC上的一点，且满足$CM:MA=1:2$．当线段OM取最大值时，点M的坐标是（　　）

A. $\left(\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)$　B. $\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$　C. $\left(\frac{6}{5},\frac{12}{5}\right)$　D. $\left(\frac{6\sqrt{5}}{5},\frac{12\sqrt{5}}{5}\right)$

解析：由圆的定义可知点C在以B为圆心，$\frac{3}{2}$为半径的圆上，取点$D\left(-\frac{3\sqrt{5}}{2},0\right)$，连接$BD$，分别过$C$，$M$作$CF\perp OA$，$ME\perp OA$，垂足为$F$，$E$，易证$\Delta OAM\sim\Delta DAC$，则问题可转化为“当线段$CD$取最大值时，求点$M$的坐标”，而由图可知当$D$，$B$，$C$三点共线时，$CD$取最大值 9，则$OM$最大值为 6，易证$\Delta BDO\sim\Delta CDF$，$\Delta AEM\sim\Delta AFC$，则$ME=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，$OE=\frac{6\sqrt{5}}{5}$，即点$M$的坐标为$\left(\frac{6\sqrt{5}}{5},\frac{12\sqrt{5}}{5}\right)$，故选 D.

例 2：如图 1，AB为$\odot O$的直径，$AB=8$，点C为圆上任意一点，$OD\perp AC$于D，当点C在$\odot O$上运动一周，点D运动的路径长为__________。

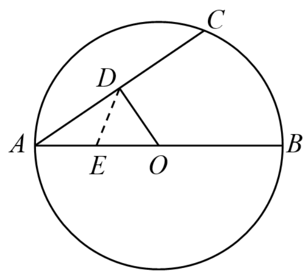

图 1

解析：由$OD\perp AC$可知，点D到OA中点E的距离为 2，即点D在以E为圆心，2 为半径的圆上，则点D运动的路径长即该圆的周长，周长为4π。

点评：若题目中含有定点、定长的条件（如例题 1 中B为定点，$BC=\frac{3}{2}$），则可根据圆的定义找出符合题目条件的隐圆，但例 2 中并未直接体现定点、定长，而是借用直角三角形的性质“斜边中线等于斜边一半”隐藏定点、定长的条件。故例 2 的难点就在于需要学生从题干中的直角三角形的性质寻找线段之间的等量关系。因此，利用定点、定长构造隐圆时，可能需要借助勾股定理、中位线性质定理、三角形三边关系、平行线分线段成比例、等腰三角形判定、全等三角形判定与性质等知识转化题干中的条件来构造隐圆模型求解。[2]

二、动点隐圆（轨迹圆）

（一）动点隐圆

若A为顶点，点B在圆上运动，则线段AB的中点的轨迹也是一个圆。

（二）例题剖析

例 3：线段AB的端点$B(4,3)$，A在圆$(x+1)^2+y^2=4$上运动，则线段AB的中点M的轨迹方程为__________。

解析：由题知设$M(x,y)$，$A(x_0,y_0)$，M为AB的中点，则M的坐标可用A，B的坐标表示。又因为

点 A 的坐标满足 $(x_0+1)^2+y_0{}^2=4$，则 M 的坐标满足 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1$（即点 M 的轨迹是一个圆），故点 M 的轨迹是以 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ 为圆心，以 1 为半径的圆，轨迹方程为 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1$。

例 4：（2022 年滁州模拟）A,B 为圆 C：$x^2+y^2-2x-4y+3=0$ 上的两个动点，P 为弦 AB 的中点，若 $\angle ACB=90°$，则点 P 的轨迹方程为____________。

解析：由于 P 为弦 AB 的中点，$\angle ACB=90°$，结合直角三角形的性质可知点 P 到圆心 C 的距离为定长符合圆的定义，即点 P 的轨迹为圆。因为点 A，B 在圆上，P 为 AB 的中点且 $\angle ACB=90°$，圆的半径为 $\sqrt{2}$，所以动点 P 到 C 的距离为 1，即点 P 的轨迹为以 $C(1,2)$ 为圆心，以 1 为半径的圆，轨迹方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$。

点评：当问题涉及某动点的轨迹方程（或轨迹路径长）时，依据题目已知条件确定动点轨迹是否为圆；若是，则结合已知条件及圆的定义及性质来探求对应动点的轨迹方程（或轨迹路径长）如例 3 此类题型，可将动点坐标用已知点的坐标表示，则可知动点坐标需满足的条件，一般情况下需满足的条件即动点轨迹方程。而例 4 中无已知坐标的点，则需要用到数形结合的思想，借助直观的“形”来解决未知的“数”。常见求轨迹的方法有直接法、定义法、相关点法、参数法、交轨法等。[3]

三、阿波罗尼斯圆

（一）定义

阿氏圆是阿波罗尼斯圆的简称，即平面内到两个定点的距离之比为一个不等于 1 的正数的点的轨迹是圆。这个轨迹最先由古希腊数学家阿波罗尼斯发现，故称作阿氏圆。其具体定义如下：如图 2 所示，已知 A，B 是平面内的两个定点，若平面内的点 P 满足 $\frac{PA}{PB}=k(k>0,k\neq1)$，则点 P 的轨迹是圆。若在线段 AB 及其延长线上分别上取点 E，F，且使得 $\frac{AE}{EB}=\frac{FA}{FB}=k$，则点 P 的轨迹就是以 EF 为直径的圆，该圆就是阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆。[4]

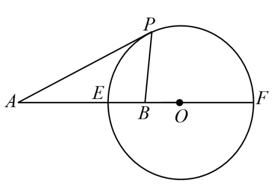

图 2

（二）例题剖析

例 5：平面内到两定点距离之比等于定值（不为 1）的动点轨迹为圆，该轨迹被人们称为阿波罗尼斯圆。平面有两点 $A(-1,0)$，$B(2,1)$，且该平面内的点 P 满足 $|PA|=\sqrt{2}|PB|$，若点 P 的轨迹关于直线 $mx+ny-2=0(m,n>0)$ 对称，则 $\frac{2}{m}+\frac{5}{n}$ 的最小值是（　　）

A. 10　　B. 20　　C. 30　　D. 40

解析：设点 $P(x,y)$，因为 $|PA|=\sqrt{2}|PB|$，则 $|PA|^2=2|PB|^2$ 即 $(x+1)^2+y^2=2[(x-2)^2+(y-1)^2]$，所以点 P 的轨迹方程为 $(x-5)^2+(y-2)^2=20$. 又 P 的轨迹关于直线 $mx+ny-2=0$ 对称，所以圆心（5，2）在该直线上，则 $5m+2n=2$，$\frac{2}{m}+\frac{5}{n}=\frac{1}{2}(5m+2n)(\frac{2}{m}+\frac{5}{n})=\frac{1}{2}(20+\frac{4n}{m}+\frac{25m}{n})$ $\geq10+\frac{1}{2}\times2\sqrt{\frac{4n}{m}\cdot\frac{25m}{n}}=20$，当且仅当 $\frac{4n}{m}=\frac{25m}{n}$，即 $m=\frac{1}{5}$，$n=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，最小值为 20.

点评：若题目中出现类似线段比值条件，则可考虑构造阿波罗尼斯圆来解决实际问题，常见于最值问题中。对于此类题型需注意题中线段比值是否为定值且比值不为 1，若不满足则无需考虑利用阿波罗尼斯圆模型解答。

四、向量定点定值

（一）性质

动点 P 满足对两个定点 A，B 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\lambda(\lambda\neq0)$，那么点 P 的轨迹是一个圆。

事实上，由于 $|AB|$ 是定值，设 AB 中点为 M，根据平面向量的极化恒等式得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PM}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2=\lambda(\lambda\neq0)$，即 $|PM|=\sqrt{\lambda+\frac{1}{4}|AB|^2}$，故动点 P 的轨迹是以 AB 中点 M 为圆心，半径为 $\sqrt{\lambda+\frac{1}{4}|AB|^2}$ 的圆。

（二）例题剖析

例 6：如图 3，正方形 $ABCD$ 的边长为 6，点 E，F 分别在边 AD，BC 上，且 $DE=2AE$，$CF=2BF$，点 P 在正方形 $ABCD$

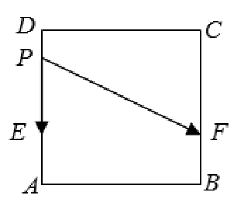

图 3

的边 AD 或 BC 上运动，若 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=1$，则满足条件的点 P 的个数为__________.

解析：由4.1的分析知，动点 P 是以 EF 中点为圆心，半径为 $\sqrt{\lambda+\frac{1}{4}|EF|^2}$ 的圆，即该例题中动点 P 是以 EF 中点为圆心，半径为 $\sqrt{10}$ 的圆，所以共有 4 个点满足条件。

例 7：（2020 年上海卷）已知 $\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{b_1}$，$\overrightarrow{b_2}$，…，$\overrightarrow{b_k}$（$k\in N^*$）是平面内两两互不相等的向量，满足 $|\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}|=1$，且 $|\overrightarrow{a_i}-\overrightarrow{b_j}|\in\{1,2\}$（其中 $i=1,2$，$j=1,2,\cdots,k$），则 k 的最大值为__________.

解析：如图 4，设 $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{OB_j}=\overrightarrow{b_j}$，则 $|\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}|=|\overrightarrow{A_2A_1}|=1$．因为 $|\overrightarrow{a_i}-\overrightarrow{b_j}|\in\{1,2\}$，所以 B_j 到 A_1，A_2 的距离等于 1 或 2，即 B 为以 A_1 为圆心，1 为半径的圆、以 A_1 为圆心，2 为半径的圆、以 A_2 为圆心，1 为半径的圆、以 A_2 为圆心，2 为半径的圆四个圆中任意两个圆的交点，则满足条件的点 B 共有 6 个，故 k 的最大值为 6.

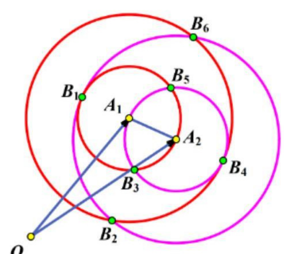

图 4

点评：若题目中出现两向量乘积为一定值（一动点对两定点）条件，则可运用定点定值模型，求出动点所在的轨迹圆的方程，再根据具体条件分析利用轨迹方程求解。对于向量型隐圆，可以从几何性质或相关知识入手，将“数”的问题转化为点、直线等与圆的位置关系问题，再利用相关的距离公式进行解题。

五、四点共圆与托勒密定理

（一）定理

若四边形 $ABCD$ 对角互补或 $AC\cdot DB=AB\cdot CD+AD\cdot BC$，则 A，B，C，D 四点共圆。

（二）例题剖析

例 8：在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp AC$，$AC=\sqrt{2}AB$，$AD=3$，$BD=2\sqrt{6}$，则 CD 的最小值为______.

解析：如图 5，设 $AB=x$，则 $AC=\sqrt{2}x$，$BC=\sqrt{3}x$，则由托勒密不等式得 $AD\cdot BC+CD\cdot AB\geq AC\cdot BD$，即 $3\cdot\sqrt{3}x+CD\cdot x\geq\sqrt{2}x\cdot2\sqrt{6}$，整理得 $CD\geq\sqrt{3}$，当且仅当 A，B，C，D 四点共圆时等号成立，且最小值为 $\sqrt{3}$．

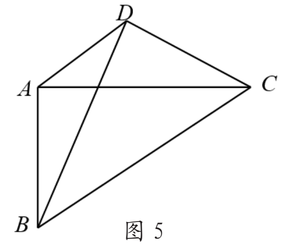

图 5

点评：当题目中出现四边形且为线段最值问题时，可考虑是否能为圆的内接四边形；若能，则可进一步判断是否可用利用托勒密定理进行解题。注意不是所有的四边形都有外接圆，当且仅当四边形的对角相加等于 180 度时，该四边形存在外接圆。

结语

隐圆问题可大致分为上述五类，本质上是考查学生对圆的定义及相关性质的掌握程度，而同时隐圆问题还可结合平面几何、解三角形、解析几何来提高解题难度。当解决隐圆问题时，先确定是隐圆五种模型定点定值、动点轨迹、阿氏圆、向量定值、四点共圆中的哪一类，再将依据题中条件画出草图，数形结合加以运用相关几何知识及公式来解决具体问题。随着时代发展、选拔改革，如今的考试侧重于创新，这意味着学生做题时，需注意审题，具体问题具体分析，切忌思维定势，突破固有解题思维，但同时也要多梳理归纳总结隐圆所可能涉及的相关知识，做到多角度思考、理解问题，能够做到学以致用，丰富解题经验，完善解题思维，进而提高解题效率。

参考文献

[1] 林群．义务教育教科书·数学（九年级上册）[J]．人民教育出版社．2013，79-80.

[2] 张进，张远宝．巧构隐圆模型 妙解最值问题 [J]．数理化学习（初中版），2022，10：40-46.

[3] 卢会玉．“隐圆”问题归类剖析 [J]．数理天地（高中版），2021，9： 1-3.

[4] 杨金鹏．例谈“阿氏圆”在求解三角形最值问题中的妙用 [J]．中学数学研究，2023，10： 55-56.

作者简介：杨煜，2004 年，女，学士，研究方向为数学与应用教学。

通讯作者：陈梅香，1982 年，博士，教授，研究方向为代数及其应用。

基金项目：莆田市科技计划项目（2022SZ3001ptxy05）；2023 年度高等教育科学研究规划课题（23SX0315）；福建省教育科学“十四五”规划 2023 年度课题（FJJKBK23-018）。