关于全概率公式与贝叶斯公式的一点认识

郭海刚　武新乾
河南科技大学 数学与统计学院

摘　要：全概率公式与贝叶斯公式是概率论与数理统计中的两个重要公式，一直是研究的热点。理解和掌握这部分内容，对于概率理论的学习至关重要。通过剖析这两个公式，本文讨论了复杂事件与复合事件、概率的古典定义与全概率公式、条件概率与贝叶斯公式的区别与联系。公式的精髓在于多次试验，不断地提升人们的认知。

关键词：复杂事件；全概率公式；贝叶斯公式；提升认知；多次试验
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2024.09.086

引言

全概率公式与贝叶斯公式是概率论与数理统计中的两个重要内容，也是该课程的重点和难点之一[1]。它们在日常生活、科学研究中都有着广泛的应用。如何能使学生深刻理解和掌握这两个公式，对于本课程的学习、概率思想的掌握，有着非常重要的意义。

由于其理论深刻抽象，全概率公式和贝叶斯公式一直是学术界的热点问题[2-4]。文献 [3] 讨论了贝叶斯公式的应用，张志刚[3] 探讨了教学设计，文献 [4] 讨论了课程思政。这些文献的目的是使理论生动形象，促进学生的理解。

根据近几年的教学实践，笔者体会到学生在这部分内容的学习中存在着畏难情绪，抱怨公式复杂难以理解，更谈不上灵活应用。为了更好地让学生理解和接受这部分内容，笔者试图通过实例从概念的深层含义解释这两个公式。

一、知识回顾

为了下面讨论的方便，给出几个定义[1]。

定义 1：设A、B为两事件，且$P(B)>0$，在B发生的条件下A发生的概率称为条件概率，记为$P(A|B)$，并且

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1}$$

定义 2：设A_1，A_2 $\cdots$ A_n为样本空间Ω的一个划分，且 $P(A_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则对于任一事件$B$，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i) \tag{2}$$

式（2）称为全概率公式。

定义 3 在定义 2 条件下，设$P(B)>0$，则

$$P(A_i|B)=\frac{\sum_{i=1}P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)},i=1,2,\cdots,n. \tag{3}$$

式（3）称为贝叶斯公式。

基于定义 1-3，讨论下面几个问题。

二、复合事件与复杂事件

在实际问题中，复杂事件的概率计算比较困难。通常将复杂事件分解为若干互不相容的简单事件，然后利用概率的有限可加性得到复杂事件的概率。那么，什么是复杂事件呢？在各类教材中都没有一个很好地解释。它有别于复合事件。例如掷一颗骰子（出现的点数）或者抛一枚硬币（正面映射为 1，反面映射为 0）。任选一个进行操作，求试验结果出现 1 的概率。如何求其概率呢？具体问题具体分析。这里既包含化整为零、又包含统一的思想。同时，这里讨论的事件又可能包含在不同的样本空间中，例如抛硬币的样本空间为 {正面，反面}，掷骰子的样本空间是 {1，2，3，4，5，6}，我们关心复杂事件 {1} 或者是抛硬币的正面或者是掷骰子的点数 1，它们不在同一个样本空间，而且抛硬币与掷骰子的权重还可以不同。计算这样的事件的概率，应用全概率公式。

例如，一盒子中有 5 个球，其中 3 个红球 2 个白球。在盒子中任取一球，由球的颜色决定是抛硬币还是掷骰子。如果取到红球，就掷骰子；反之，就抛硬币。求试验结果为 1 的概率。

可见，试验结果为 1 就是一个复杂事件，它不是掷骰子的点数 1，也不是抛硬币为正面，也不是二者同时发生，也不是二者至少有一个发生等等。

三、概率的古典定义与全概率公式

全概率公式通过分析复杂事件背后的各种不同的原因、情况、途径及其可能性，综合后求出复杂事件的概率[1]。侧重于由原因求结果发生的概率。因此，可以计算由多个原因引起的结果发生的概率，也可以计算多次试验中第k次（$k\geq 2$）试验的某一结果发生的概率等。而概率的古典定义是求满足有限等可能样本空间中某一事件发生的概率。二者差别是很明显的。

例 1. 已知甲袋中有 5 个红球 3 个白球，乙袋中有 4 个红球 6 个白球．试求下列事件的概率．

（1）合并两个口袋，从中随机地取一个球，该球是红球；

（2）随机地取一个口袋，再从该袋中随机地取一个球，该球是红球。

分析：就像上文解释的一样，复杂事件的样本点在不同的样本空间中。如果在同一个样本空间中，如（1），合并两个口袋，随机取到一个红球的概率，就应该使用概率的古典定义。而问题（2），随机取一个口袋就构成样本空间的一个划分，再从取到的口袋中取到红球。该试验分为两步完成，求第二步试验的某一结果发生的概率，应该使用全概率公式。

解：设A表示取到红球，B表示取到甲袋，则

（1）$P(A)=\dfrac{5+4}{5+3+4+6}=\dfrac{9}{18}$；

（2）$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{4}{10}\right)=\frac{41}{80}.$$

四、条件概率与贝叶斯公式

条件概率是计算某一事件发生条件下，另一事件发生的概率。它与这两事件发生的先后、因果没有关系。而贝叶斯公式是计算结果发生条件下，某一原因发生的概率，侧重于逆向概率计算，两事件有因果、先后关系。

例 1（续）（3）已知取到的是甲袋，再从中取球，问取到红球的概率；

（4）已知取到的是红球，问该球是来自甲袋的概率。

显然，（3）是条件概率，它是随机试验的第一步取到甲袋，再求第二步取到红球的概率，属于条件概率问题；而（4）是已知随机试验的第二步的某一结果发生，求某一原因发生的概率，用贝叶斯公式，相对于全概率公式而言，该题是由果溯因，属于逆概率问题。

解：（3）$P(A|B)=\dfrac{5}{8}$；

（4）$P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}}{\frac{41}{80}}=\dfrac{25}{41}.$

为了帮助理解，再讨论下面这个例子。

例 2 有三个班级，三个班中总人数分别为 10 人、20 人、25 人，其中各班女生人数分别为 4 人、10 人、15 人．先随机抽一个班，再从该班中依次抽取 2 人，求

（1）第一次抽到女生的概率；

（2）在第一次抽到女生的条件下，第二次抽到的还是女生的概率；

（3）在第二次抽到女生的条件下，第一次抽到的是女生的概率；

（4）在第一次抽到女生的条件下，抽到的学生是一班的概率。

分析：随机试验分为三个步骤，第一步抽一个班，第二步抽女生，第三步抽女生。所以，第一问就是求第二步的某一结果用全概率公式；第二问就是已知第二步的结果，求后一步的某一结果发生的概率，用条件概率，是顺向概率问题；第三问是已知随机试验的第三步的结果已经发生，求前一步的某一结果发生的概率，用贝叶斯公式，是逆概率问题；同理，第四问也是如此。

解：设$A_i\ (i=1,2,3)$表示分别抽到三个班，$B_i\ (i=1,2)$表示抽到女生，则

（1）$P(B_1)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_1|A_i)=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{4}{10}+\dfrac{10}{20}+\dfrac{15}{25}\right]=\dfrac{1}{2}$；

（2）$P(B_1B_2)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_1B_2|A_i)=$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{\mathrm{A}_4^2}{\mathrm{A}_{10}^2}+\frac{\mathrm{A}_{10}^2}{\mathrm{A}_{20}^2}+\frac{\mathrm{A}_{15}^2}{\mathrm{A}_{25}^2}\right]=\frac{821}{3420},$$

$$P(\overline{B_1}B_2)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(\overline{B_1}B_2|A_i)=$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{6\times4}{\mathrm{A}_{10}^2}+\frac{10\times10}{\mathrm{A}_{20}^2}+\frac{10\times15}{\mathrm{A}_{25}^2}\right]=\frac{889}{3420},$$

$$P(B_2)=P(B_1B_2)+P(\overline{B_1}B_2)=\frac{1}{2},$$

所以，$P(B_2|B_1)=\dfrac{821}{1710}$；

（3）$P(B_1|B_2)=\dfrac{821}{1710}$；

（4）$P(A_1|B_1)=\dfrac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(B_1)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{4}{10}}{0.5}=\dfrac{4}{15}$．

尽管（2）和（3）计算结果相同，但是含义完全不同。（2）计算顺向概率，使用条件概率，（3）计算逆向概率，使用贝叶斯公式。

例 3[5] 某校有甲、乙、丙和丁四个系，英语四级的通过率分别为 20%、30%、40% 和 10%. 请问该校的四级通过率是多少？

分析：如果问任选一系，该系的四级通过率是多少，应该是全概率公式，其结果为 25%。显然，这是每个系

的平均通过率。由于各个系的人数不一定是相等的，所以并不是该校的通过率。如果计算该校的四级通过率，必须有各个系的人数或比例，若假设四个系的人数分别占比为 20%、40%、30% 和 10%，则容易得到该校的四级通过率为 29%。

解：设$A_i\left(i=1,2,3,4\right)$分别表示选到的学生来自甲、乙、丙和丁系，$B$表示选到的学生通过四级，根据全概率公式容易得到

$$P\left(B\right)=\sum_{i=1}^{4}P\left(A_i\right)P\left(B\left|A_i\right.\right)=29\%.$$

其实，这个概率是可以使用古典定义计算的。学校的总人数设为N，则各班通过四级的人数分别为$4\%N$，$12\%N$,$12\%N$和$1\%N$，总计为$29\%N$，所以得到

$$P\left(B\right)=\frac{\text{通过四级的总人数}}{\text{全校人数}}=\frac{29\%N}{N}=29\%.$$

五、全概率公式与贝叶斯公式的精髓在于提升认知

全概率公式和贝叶斯公式是一种人生算法，不断利用先验概率和条件概率修正后验概率，提高人们对事物的认知。例如狼来了、三人成虎等等。所以，全概率公式和贝叶斯公式的精髓是进行多次试验，不断地修正先验概率，以获得更接近实际情况的后验概率。

例 4 试用概率知识解释狼来了背后的道理。

解：设$A_i\left(i=1,2,3\right)$表示第i次小孩喊狼来了（为真话），设$B_i\left(i=0,1,2,3\right)$表示第$i$次人们相信小孩说的话，其中$B_0$表示第一次小孩狼来了之前人们对他说的话的可信程度，假设人们对小孩不了解，设$P\left(B_0\right)=0.5$．人们相信小孩时，他大概率说的是真话；人们不相信小孩时，他大概率说的是假话，所以设$P\left(A_1\left|B_0\right.\right)=0.8,P\left(A_1\left|\overline{B_0}\right.\right)=0.2$。根据全概率公式，有

$$P\left(A_1\right)=P\left(B_0\right)P\left(A_1\left|B_0\right.\right)+P\left(\overline{B_0}\right)P\left(A_1\left|\overline{B_0}\right.\right)=$$
$$0.5\times0.8+0.5\times0.2=0.5.$$

经过第一次，狼没有来的概率为$P\left(\overline{A_1}\right)=1-0.5=0.5$。由贝叶斯公式，得

$$P\left(B_0\left|\overline{A_1}\right.\right)=\frac{P\left(B_0\right)P\left(\overline{A_1}\left|B_0\right.\right)}{P\left(\overline{A_1}\right)}=\frac{0.5\times0.2}{0.5}=0.2.$$

经过第一次后，人们相信小孩说的话的概率变为$P\left(B_1\right)=P\left(B_0\left|\overline{A_1}\right.\right)=0.2$。利用全概率公式，得

$$P\left(A_2\right)=P\left(B_1\right)P\left(A_2\left|B_1\right.\right)+P\left(\overline{B_1}\right)P\left(A_2\left|\overline{B_1}\right.\right)=$$
$$0.2\times0.8+0.8\times0.2=0.32.$$

经过第二次，狼没有来的概率$P\left(\overline{A_2}\right)=0.68$，由贝叶斯公式，得

$$P\left(B_1\left|\overline{A_2}\right.\right)=\frac{P\left(B_1\right)P\left(\overline{A_2}\left|B_1\right.\right)}{P\left(\overline{A_2}\right)}=\frac{0.2\times0.2}{0.68}=\frac{1}{17}\approx0.06.$$

将后验概率替代先验概率，得$P\left(B_2\right)=P\left(B_1\left|\overline{A_2}\right.\right)\approx0.06$。可见，经过两次说谎后，人们对小孩说的话的可信程度急剧下降，由$0.5\to0.2\to0.06$，所以，第三次小孩喊狼来了的时候，就没有人去打狼了。这个例子也告诫人们，要诚实守信，多次说谎，总有一天会丧失人们对你的信任。

结语

通过本文的讨论，得出了几个结论：复杂事件不是复合事件，它既不是某一原因的子事件，也不是所有原因的和事件或积事件的子事件。全概率公式考虑的是不同情况下的一个综合结果的概率，古典概型是考虑随机试验的一个结果的概率。条件概率不考虑事件的因果关系，贝叶斯公式考虑结果发生条件下某一原因发生的概率，是计算逆向概率。全概率公式与贝叶斯公式是一种人生算法，通过多次学习，不断提高人们的认知。

参考文献

[1] 概率论与数理统计（第三版）[M]. 武新乾 . 科学出版社，2023.

[2] 谢平，李德，陈广才，等 . 基于贝叶斯公式的湖泊富营养化随机评价方法及其验证 [J]. 长江流域资源与环境，2005,14(2):224-228.

[3] 张志刚 ."全概率公式"内容的教材比较与教学建议 [J]. 教育研究与评论，2024(2):49-54.

[4] 许道军，孙达生，吴素琴 . 全概率公式与贝叶斯公式课程思政设计 [J]. 高等数学研究，2023,26(6):81-83,92.

[5] 全概率公式注记 [J]. 吴黎军 . 高等数学研究，2013,16(2):55-57.

作者简介：郭海刚，1972 年，男，汉族，山西晋城人，博士，副教授，研究方向：概率论与数理统计理论研究和资源建设。

基金项目：河南科技大学实验技术开发基金（SY2324041，SY2324005），河南科技大学第四批课程思政样板课程（概率论与数理统计）。