高等数学教学中函数的三种连续性探究

黄功宇　赵红艳　沈礼滢

郑州电力职业技术学院公共教学部

摘　要：函数的连续性、一致连续性和绝对连续性一直都是实变函数的重要内容，都是建立在函数极限概念的基础之上，用以刻画函数的图像变化情况和研究函数性质。本文深入解析三种连续性并列出实函数例子，彻底缕清在不同区间上，三种连续性的关系，最终给出定理和详细证明过程。

关键词：连续；一致连续；绝对连续；*Cantor*定理；关系；*Lipschitz*条件

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2024.11.201

引言

函数的这三种连续性是层层递进的关系，要求条件也逐步严苛。在高等数学教学中，连续和一致连续同为重点难点，也是不少学生较为困惑不解的。尤其，一致连续与绝对连续更甚。绝对连续已经属于实变函数的范畴，因此在普通的高等数学教学中提及不多，但对于学习数学物理专业，是务必要掌握住的重点难点。本文通过分析概念，举例论证以及证明，给出三种连续性及它们之间关系的主要结论。即，函数$f(x)$在区间I上一致连续，可得$f(x)$在区间I上连续，反之不一定。若I为有限闭区间$[a,b]$，据康托定理，$f(x)$在$[a,b]$上连续等价于$f(x)$在$[a,b]$上一致连续。另外，一致连续与绝对连续的主要区别在于δ的选取，一致连续可视为绝对连续的一种特殊情况。

定义 1[1]　若函数在x_0点附近$U(x_0)$有定义，并且

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

称$f(x)$在x_0点连续，或者称x_0点是$f(x)$的连续点。

某些文献教材中用增量Δx，Δy结合图像给出函数连续直观的定义．若函数在x_0点附近$U(x_0)$有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$$

称$f(x)$在x_0点连续。容易得出，该两种连续性的定义是互为充要条件的，这个问题留个读者自行思考。常见的基本初等函数在定义域内都是连续的，主要包括常数函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数。这些函数的图像性质等读者应已经掌握，这里也不再赘述。

定义1'　若函数在x_0点附近$U(x_0)$有定义，若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\partial(\varepsilon,x_0)>0$，使得当$|x-x_0|<\delta$时有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

则称$f(x)$在点x_0处连续。如果函数$f(x)$在区间(a,b)内每一点都连续，则称$f(x)$在开区间(a,b)内连续。这种定义描述用的是法国数学家 A. L. Cauchy 的$\varepsilon-\delta$语言，严密性极强。在研究的一致连续，绝对连续中，被广泛的使用。

定义 2　函数$f(x)$在区间I的每一点都连续，则称$f(x)$在区间I内连续。

定义 3　若对任何$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$\forall x_1$，$x_2\in I$且$|x_1-x_2|<\delta$时有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

则称$f(x)$在I上一致连续。函数的一致连续性是指函数在定义域上或指定的范围内的任意两个点之间，当这两个点的距离足够小时，函数值的增量都不会超过一个预设的固定的值。这里可以给出例子来更好地理解一致连续。如$y=\frac{1}{x}$在区间$(c,1)(c>0)$上是一致连续的。当x_0，$x_1\in(c,1)$时，对任何$\varepsilon>0$　可取$\delta=c^2\varepsilon>0$，那么对$(c,1)$上的任何两点只要$|x_1-x_0|<\delta$　就能确保

$$|f(x_1)-f(x_0)|=\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_0}\right|=\left|\frac{x_1-x_0}{x_1x_0}\right|<\frac{|x_1-x_0|}{c^2}<\varepsilon$$

就是说该函数在区间$(c,1)$内是一致连续。其中给出的$\delta=c^2\varepsilon>0$也直接说明了其存在性。这里需要注意的是$\delta=c^2\varepsilon$取值并不是唯一的，只要能充分的论证$|f(x_1)-f(x_0)|<\varepsilon$成立都是可以的。另：函数$y=\frac{1}{x}$在区间$(0,1)$上是连续的，但不再是一致连续。此时的$\delta$无论如何取值（取值需要与$x_1$和$x_0$有关），都无法确保$|f(x_1)-f(x_0)|<\varepsilon$

定义 4[2]　设$f(x)$是$[a,b]$上的实值函数，若对任何$\varepsilon>0$，恒有$\delta>0$，使对于$[a,b]$中任何有限个两两不相交的开区间$\{(a_k,b_k)\}(1\le k\le n)$，即

$$a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots\cdots<a_n<b_n$$

只要$\sum_{i=a}^{n}(b_k-a_k)<\delta$，便有$\sum_{i=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$[3]

则$f(x)$称为$[a,b]$上的绝对连续函数。绝对连续性是指函数在定义域或指定区域上的任意两个点之间，当这两个点距离足够小，函数图像是光滑的连续的。绝对连续性是一种更强的连续性要求，普通的常数函数就是一个绝对连续函数的例子。

这里也给出一个绝对连续的非平凡的例子

函数$f:[a,b]\to R$可积，即$\int_a^b|f|d\lambda=\int|f|\chi_{[a,b]}d\lambda<+\infty$．定义函数$F(x)=c+\int_a^x fd\lambda=c+\int f\chi_{[a,x]}d\lambda,x\in[a,b]$．

根据函数的一致可积性，对任何$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对任何$B\in\Psi$

如果$\lambda(B)<\delta$，则$\int_B|f|d\lambda=\int_B|f|\chi_{[a,b]}d\lambda<\varepsilon$．

特别的，对任何(a,b)中不交开区间族$\{I_j=(a_j,b_j)\}_{j=1}^{M}$

如果$\sum_{j=1}^{M}(b_j-a_j)<\delta$，那么$\sum_{j=1}^{M}|F(b_j)-F(a_j)|=\sum_{j=1}^{M}\left|\int_{a_j}^{b_j}fd\lambda\right|$

$$\le\sum_{j=1}^{M}\int_{a_j}^{b_j}|f|d\lambda=\sum_{j=1}^{M}\int_I|f|d\lambda\le\int_{\sum_{j=1}^{M}I_j}|f|d\lambda<\varepsilon$$

一、连续性与一致连续性

函数$f(x)$在区间I上连续是一致连续的必要条件；若I为有限闭区间$[a,b]$，据康托定理，充分性成立。而对于I为开区间及无穷区间的情形，充分性不一定成立。但是，具备一定的条件时，充分性也成立。在一般条件下，函数连续则未必一致连续，函数一致连续则在该区间上一定连续。

（一）有限开区间上连续性与一致连续性的关系

若函数$f(x)$在有限开区间(a,b)上连续，则它在该区间上一致连续的充分必要条件是$\lim_{x\to a^+}f(x)$与$\lim_{x\to b^-}f(x)$都存在。

证明过程如下：

充分性：

令$f(a)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，$f(b)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$，则$f(x)$为定义在闭区间$[a,b]$上的连续函数，则$f(x)$在闭区间$[a,b]$上一致连续，从而$f(x)$在开区间$(a,b)$上一致连续，充分性得证。

必要性：

由于$f(x)$在开区间(a,b)上一致连续，则对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$x_1,x_2\in(a,b)$，$|x_1-x_2|<\delta$时有

$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

因此，当$X_1,X_2\in(a,b)$，$a<X_1<a+\delta,a<X_2<a+\delta$时有，$|f(X_1)-f(X_2)|<\varepsilon$

由柯西准则得$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在，同理可证$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在，必要性得证。

上述证明说明，在有限开区间上（或半开半闭区间上）函数的连续性与一致连续性是否等价取决于函数在两端点处的极限情况。这里典型的例子就是上面提到的$y=\frac{1}{x}$，在区间$(0,1)$上是连续函数，但不一致连续。在$(c,1)(c>0)$上是连续函数，也是一致连续函数。两者不同的关键在左端点0和c处的极限存在与否，决定函数在不同区间的一致连续。

（二） 无穷区间上连续性与一致连续性的关系

若函数$f(x)$在无限区间$[a,+\infty)$上连续，则在该区间极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在。那么函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上一致连续。

证明过程如下：

1. 由极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在和柯西准则得：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_0>M$（$M$为一个充分大的数），当$x_1,x_2>\delta_0$时有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。

2. 由康托定理得$f(x)$在$[a,\delta_0+1]$上一致连续，那么对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$，当$x_1,x_2\in[a,\delta_0+1]$，$|x_1-x_2|<\delta_1$时有

$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

令$\delta=\min\{1,\delta_1\}$，当$x_1,x_2\in[a,+\infty)$，且$|x_1-x_2|<\varepsilon$，此时，$x_1,x_2$同属于$[a,\delta_0+1]$或$(\delta_0,+\infty)$，因此由1.2.得$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，即得$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续。

由上述证明可推出，若函数$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，如果极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$均存在，则$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上一致连续。

综上所述，函数$f(x)$在区间I（闭区间，开区间，半开半闭区间或无穷区间）上连续是它在该区间上一致连续的必要条件；若$f(x)$在区间I端点（包括$\pm\infty$）处极限存在，那么充分性也成立。这里都可以参考1.1处的函数在$[a,+\infty)$的连续与一致连续来进行实例考察论证。

二、一致连续性与绝对连续性

（一）一致连续性与绝对连续性的关系

实际上，函数绝对连续性概念是由积分的绝对连续性概念演化而来，主要用于刻画函数光滑性质的，在实变函数理论上使用较多。绝对连续的一个重要特征就是函数的绝对连续与函数的可微性有关，即绝对连续的函数几乎处处可微，但反之不然。这与函数的一致连续完全不同，一致连续反映的是函数的自变量的取值与函数值变化间的关系，与函数的可微性无关。众所周知，确实存在着有界闭区间上处处连续且一致连续，但是处处不可微的函数，即不绝对连续的函数。

为了考察一致连续与绝对连续之间的关系，研究绝对连续性，先给出有界全变差函数和利普希茨条件的相关内容。

定义5 设函数$f(x)$为闭区间$[a,b]$上有限函数，作$[a,b]$的一个划分T：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$.

则称$\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$为函数$f(x)$相应于划分T的一个变差，记作$V(f:T)$。

把$\sup\{V(f:T)|T为区间[a,b]的划分\}$称为$f(x)$在区间$[a,b]$上的全变差，记作$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$。

若全变差$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<\infty$，称$f(x)$在区间$[a,b]$上为有界全变差函数。

命题：函数$f(x)$在区间I上满足利普希茨条件，即存在常数$L>0$，使$\forall x_1,x_2\in I$都有$|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|$成立。则函数$f(x)$在区间I上一致连续。

命题：函数$f(x)$在区间I上可导，且$f'(x)$有界。则函数$f(x)$在区间I上一致连续。反之，若导函数$f'(x)$无界，原函数$f(x)$不一定是不一致连续的。

命题：函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上可导且$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\infty$，则函数$f(x)$一定不一致连续。

定理[4]：函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上一致连续$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\forall n\in N_+,\exists\delta>0$，当$x_i$，$y_i\in[a,b]$，且$x_i<y_i<x_{i+1}<y_{i+1}$，（$i=1,2,\cdots,n$）满足$\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i-x_i|<\delta$时有，

$\sum\limits_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|<\varepsilon$

证明过程如下：

必要性：只要取$n=1$，显然可见定理的充分性成立，充分性得证；

充分性：若设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上一致连续，那么对$\forall\varepsilon>0,\forall n\in N_+$，$\exists\delta>0$，当$x,y\in[a,b]$，$|x-y|<\delta$时有

$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{n}$成立。

因此，当x_i，$y_i\in[a,b]$，且$x_i<y_i\le x_{i+1}<y_{i+1}$，$(i=1,2,\cdots,n)$满足$\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i-x_i|<\delta$时，就有$\sum\limits_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|<n\cdot\frac{\varepsilon}{n}=\varepsilon$成立。

定理得证

由上述证明可见，一致连续性与绝对一致连续性的区别在于δ值的选取，绝对连续对δ不仅要求与ε有关，还要求与数对(x_i,y_i)的个数n有关，即$\delta=\delta(\varepsilon,n)$

而一致连续要求δ只与ε有关，与数对(x_i,y_i)的个数无关。

由绝对连续的定义及此定理可得：绝对连续的函数必定一致连续，一致连续函数不一定是绝对连续函数。

例1[5] 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin(\frac{1}{x^2}) & 0<x\le 1\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$f'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\qquad 0<x\le 1$$

因为$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，从而它在$[0,1]$上一致连续，且处处可微。这里在$x=0$处只考虑函数的右导数即可。但是$f(x)$在$[0,1]$上的全变差却是无穷大的。事实上，在$[0,1]$上去分点

$$0<\frac{1}{\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}}<\frac{1}{\sqrt{n\pi}}<\frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi+\frac{\pi}{2}}}<\cdots\cdots<\frac{1}{\sqrt{\pi+\frac{\pi}{2}}}<\frac{1}{\sqrt{\pi}}<\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}<1$$

于是有

$$V=\left|\sin 1-\frac{2}{\pi}\right|+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$$

由此可见，$\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)=+\infty$，这说明了可微函数未必是全变差的，也就是说$f(x)$在$[0,1]$上是一致连续的并不绝对连续。

三、连续函数，一致连续函数及绝对连续函数的性质

（一）连续函数的性质

1. 局部有界性

若函数$f(x)$在点a处连续，则函数$f(x)$在点a的某邻域$U(a)$内是有界的，即$\exists M>0, \exists\delta>0, \forall x$: $|x-a|<\delta$，有$|f(x)|\le M$。

2. 局部保号性

若函数$f(x)$在点a处连续，且$f(a)\neq 0$，则函数$f(x)$在点a某邻域$U(a)$与$f(a)$同号，即$\exists\delta>0$，$\forall x$：$|x-a|<\delta$，有$f(a)f(x)>0$。

3. 四则运算

若函数$f(x)$与$g(x)$都在点a连续，则函数

$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\frac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$
在点a也连续。

4. 复合性（复合函数的连续性）

若函数$y=\phi(x)$在点a连续，且$b=f(a)$，而函数$z=f(y)$在点b连续，则复合函数$z=f(\phi(x))$在点a连续。

（二）一致连续性与绝对连续性的性质及比较

1. 四则运算

若函数$f(x)$与$g(x)$都在闭区间$[a,b]$上绝对连续，则$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$也都绝对连续。此外还有，当$g(x)$没有零点的时候，$\frac{f(x)}{g(x)}$也绝对连续。但是，如果两个函数是一致连续的，它们的乘积，商不一定一致连续，例如：函数$f(x)=a$（a为常数），$g(x)=x$在区间$(0,1)$内均是一致连续的，但是它们的商$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{x}$在区间$(0,1)$内却不一致连续。

2. 复合性（复合函数的绝对连续性）

若函数$f(x)$与$g(x)$分别在闭区间$[a,b]$和$[p,q]$上绝对连续，且$a<g(t)<b$，$g(t)$严格单调递增，则函数$f(g(t))$在$[p,q]$上是绝对连续的。

注意以下几点：

（1）两个绝对连续的函数可以构造成一个不绝对连续的复合函数 [6]。

（2）两个非绝对连续的函数却可以构造成绝对连续的复合函数。

（3）设函数$f(x)$在区间I_1上是一致连续的，函数$g(y)$在区间I_2上是一致

连续的，并且区间I_2包含了函数$f(x)$的值域，但是复合函数$g(f(x))$在区间I_1上不一定一致连续（注意：若$g(y)$）在$f(x)$的值域内一致连续，则$g(f(x))$在区间I_1上一致连续 [7]）。

3. 区间可加性

若函数$f(x)$在闭区间$[a,c]$和$[c,b]$（$a<c<b$）上都是绝对连续或一致连续的，那么它在闭区间$[a,b]$上也是绝对连续或一致连续的。

但是需要注意到：$f(x)$在区间I_1和I_2上一致连续，但在$I_1\cup I_2$上不一定一致连续的，也未必是绝对连续的。

4. 满足利普希茨条件的函数是绝对连续函数，而且$a.e.$（几乎处处）有$|f'(x)|\le M$但是，绝对连续的函数未必能满足某些α阶的利普希茨条件 [8]。

例 2[9] 设函数$f(x)=x^{1/3}$，$0\le x\le 1$，则函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上是绝对连续的。

现在证明对于$\alpha>\frac{1}{3}$，函数$f(x)$在$[0,1]$上不满足α阶的利普希茨条件。事实上，假设其满足α阶的利普希茨条件，即存在正常数M，使得对任意$x_1,x_2\in[0,1]$，都有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le M|x_1-x_2|^{\alpha}$$

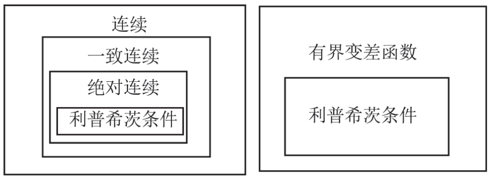
特别的，也应该有$|f(x)|\le Mx^{\alpha}$，$0\le x\le 1$。即$x^{\frac{1}{3}-\alpha}\le M$，由于$\frac{1}{3}-\alpha<0$，因此当$x\to 0^{+}$时，$x^{\frac{1}{3}-\alpha}\to+\infty$。这样就得到矛盾。

同理对于一致连续的函数也有相似的结论。即满足利普希兹条件的函数是一致连续的，反之不然。例如$f(x)=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续，但是不满足利普希茨条件 [9-10]。

四、总结三种连续性

高等数学的课堂教学中，普通专业学生主要掌握函数极限与连续性，理工科专业学生则需要理解连续与一致连续以及它们的本质区别，学会利用例子来区别它们的不同，也要学会证明函数的连续性，尤其是一致连续或证明不一致连续。最后的绝对连续性，对于数学专业学生，则要利用全变差函数，利普希茨条件等来掌握绝对连续的含义，绝对连续和一致连续的区别，它们反映到函数图像上的不同之处。

三种连续性的条件是逐步收紧的，这些限制条件本质就是来刻画增量$\Delta x,\Delta y$的关系。不同的$\Delta x,\Delta y$的变化关系，反映出来的就是三种不同的连续性。在最后用韦恩图来画出它们的关系。



参考文献

[1] 华东师范大学数学系编，数学分析（第三版）上册 [M]. 北京：高等教育出版社，2001.

[2] 周性伟 . 实变函数 [M]. 北京 : 科学出版社 , 1998.

[3] Torchinsky A. Real Variables. New York: Addison-Wesley Pub. Comp. Inc., 1988.

[4] 王晶昕，等 . 关于函数的连续性的讨论 [J]. 高等数学研究 , 2009.

[5] 裴礼文 . 数学分析中的典型问题与方法（第二版）[M]. 北京 , 高等教育出版社 , 2006.

[6] 汪林 . 实分析中的反例 [M]. 北京 : 高等教育出版社 , 1989.

[7] 强文久，等 . 数学分析的基本概念与方法 [M]. 北京 : 高等教育出版社 , 1989.

[8] Rudolf Lipschitz. Lipschitz continuity. Germany.

[9] 谢惠民，等 . 数学分析习题课讲义 [M]. 北京 : 高等教育出版社 , 2003.

[10] 王俊青，等 . 数学分析中的反例 [M]. 成都 : 电子科技大学出版社 , 1994.

作者简介：黄功宇（1990-）男，汉族，河南信阳人，硕士研究生，研究方向：基础数学代数学。