

基于教学案例的组合数学教学改革探索

黄志华

嘉应学院 数学学院

摘要：组合数学是高中数学竞赛和强基工程课程里涉及的内容，同时也是高校数学学院数学学科及计算机学科的一门重要课程，此课程所需的解题技巧要求高、解题思维和方法复杂难懂，因而学生不易理解掌握。根据组合数学课程的特点，通过对教材内容的研究整合，按照从易到难的学习途径，并结合数学软件 MATLAB 和教学实践，给出一些组合数学课程的教学思路、方法和措施，使学生能领略组合数学的魅力，激发学生学习组合数学的热情。

关键词：教学案例；数学软件 MATLAB

【DOI】 10.12252/j.issn.2096-6288.2024.12.201

引言

组合数学 (Combinatorics)，又称组合分析 (Combinatorial Analysis)，它是研究生活中离散结构的数数、分析和优化等问题的一门学科，组合数学，组合数学主要研究离散对象在一定条件下的可行方案的次数，即研究在给定的条件下离散对象构成的集合的数目，可以用一定的规律把它们罗列出来。组合数学的发展冲击了传统的数学分析和代数，使得占统治地位的数学科目又多了一门。现代数学可以分为两大类：一类是研究连续对象的，如数学分析、微分方程等，另一类就是研究离散对象的组合数学，可以看出它的重要性。组合数学在基础数学和计算机科学研究具有重要的地位，在其他的学科：如管理学、信息学、电子工程学、人工智能学、物理、化学、生命科学等也有重要的应用 [1-3]。

组合数学作为一门重要的数学课程，MATLAB 也是数学的一门重要软件，数数的问题是一个复杂的、繁琐的课题，在教学中如何引导学生更好地学习它，组合数学教学工作是一项常讲常新的富有挑战性的工作，将两者巧妙地结合起来，能大幅提高学习效果，直接锻炼学生日后运用计数理论解决实际问题的能力。组合数学有别于其他一些数学课程的是它与实际问题联系密切，通过加入 MATLAB 软件，来培养学生的数学应用能力和创造能力 [4]。组合数学解决问题的方法可以分类，建立特征，这些特征可以在讲解知识的过程中让学生培养思路，激发学生的学习兴趣 and 创造性思维能力 [5-7]。

下面将结合教学中的实践来论述组合数学教学的引入与展开方法。

一、主要内容

(一) 以竞赛数学题的竞争性导出组合数学的研究内容

高中学习阶段，同学们就见识过组合数学的相关问

题，尤其是现在竞赛数学中，这里题比较贴近生活且有一定的社会背景，有难度，是一个应用性实用性都十分强的数学分支，这样的经典组合数学有很多，例如夫妻男女分别入座问题、斐波那契的兔子数列问题、欧拉数求与某数互质的个数问题等等，这些例子均极富趣味性但难度不小。在一些困难的组合计数问题的授课中，可以先讲一些简单的数学游戏背景，再慢慢过渡到一般理论，这样学生便易于接受新知识。

例如：马路上有编号为 1 到 10 的十只路灯，为了节约用电，现要求把其中的三只灯关掉，但不能同时关掉相邻的两只或三只，也不能够关掉两端的路灯，则满足条件的关灯方法有多少种？



首先，将此题向着排列组合靠拢：

先将亮的 7 盏灯排成一排，有 1 种排法，由题意，问题等价于把这 7 盏灯分成 4 堆，每堆的个数大于等于 1，则相当于在 6 个符合条件的空位，任取 3 个空位插入，就可以得到想要的结果，故，有 $C_6^3 = 20$ 种情况。

上面的问题写成纯数学语言如下：

不定方程 $x_1 + x_2 + \dots + x_4 = 7$ 的正整数解的个数为： $C_6^3 = C_{7-1}^{7-4}$ 。

接着将这个题进行深入的分析一般情况的解法：

不定方程 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r, (r \geq n)$ 的正整数解的个数怎么求？

把它设置为以下的情景：马路上有编号为 1 到 $r + n - 1$ 只路灯，为了节约用电，现要求把其中的 $n - 1$ 只灯关掉，但每只灯不能同时关掉相邻的灯，也不能够关掉两端的路灯，则满足条件的关灯方法有多少种？

这个时候，我们按照之前的思路就可以得到：

先将亮的 $r + n - 1 - (n - 1) = r$ 盏灯排成一排, 有 1 种排法, 由题意, 问题等价于把这 r 盏灯分成 n 堆, 每堆的个数大于等于 1, 则相当于在 $r - 1$ 个符合条件的空位, 任取 $n - 1$ 个空位插入, 就可以得到想要的结果, 故, 有 $C_{r-1}^{n-1} = C_{r-1}^{r-1-n+1} = C_{r-1}^{r-n}$ 种情况. 再回头去验证刚才 10 盏灯的例子, 结论成立.

接着去扩展此题如下: 不定方程 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r, (r \geq n)$ 的非负整数解的个数怎么求?

因为我们有了不定方程 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r, (r \geq n)$ 的正整数解的个数结论, 所以上面的问题要向着这个结论靠拢: 不定方程 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r, (r \geq n)$ 的非负整数解等价于: 不定方程 $(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + \dots + (x_n + 1) = r + n, (r \geq n)$ 的非负整数解, 令 $(x_i + 1) = y_i, (i = 1, 2, \dots, n)$, 则上面的式子等价于不定方程 $y_1 + y_2 + \dots + y_n = r + n, (r \geq n)$ 的正整数解的个数: $C_{r+n-1}^{r+n-n} = C_{r+n-1}^r$

至此, 关于不定方程的非负整数解、正整数解的情况都已经讨论完毕了, 但是这里面要强调的就是, 这里面讲的不定方程, 他们的系数都是一样的, 或者说系数都是 1, 在这个情况下才能够要用到这两个结论. 如果系数不全相等, 这个时候要进行转换或者用到生成函数等工具, 难度系数大幅增加. 例如:

2021 年的复旦大学强基计划题, 方程 $18x + 4y + 9z = 2021$ 的正整数解有多少个?

分析如下, 由于所给题目的系数是不相等的, 所以先把这些系数通过某些等价变换变成是一样的, 然后再利用上面不定方程的结论.

解: 由 $2021 \equiv 5 \pmod{9}$, 可知 $y = 9w + 8, w \in N$
所以 $2x + 4w + z = 221$,

由 $221 \equiv 1 \pmod{2}$, 可知 $z = 2s + 1, s \in N$,
所以 $x + 2w + s = 110, x + s$ 为偶数.

情形一: 若 $x = 2p + 1, s = 2q + 1, p, q \in N$,
则 $q + w + p = 54$, 有 C_{54+3-1}^{54} 个解;

情形二: 若 $x = 2p, s = 2q, r \in N^*, q \in N$,
则 $r + w + t = 55$,

则 $r + (w + 1) + (t + 1) = 57$, 共有 C_{57-1}^{57-3} 个解,
则共有 $C_{54+3-1}^{54} + C_{57-1}^{57-3} = 3080$ 个正整数解.

(二) 将数学软件 MATLAB 应用到组合数学教学中

随着科学技术的快速发展, 特别是组合数学、计算数学、计算机数学的发展, MATLAB 数学软件被开发并且日趋完善, 它的命令表达式与普通的数学、工程中数学

常用的形式也相似. 用 MATLAB 软件编程不但可以计算速度快而且还可以解决很多简单数但繁琐的问题. 例如:

将与 105 互素的所有正整数从小大排成数列, 求这个数列的第 2010 项.

设所求整数为 N . 问题等价于: 前 N 数中不能被 3, 5, 7 整除的所有正整数, 共有 2010 个. 即:

$$N - \left(\binom{N}{3} + \binom{N}{5} + \binom{N}{7} - \binom{N}{15} - \binom{N}{21} - \binom{N}{35} + \binom{N}{105} \right) = 2010$$

也就是说, 我们想从 1 开始数, 不能被 3, 5, 7 整除的数就留下了, 数到要求的第 20120 对应的数是几即可, 这种重复性的工作就要借助数学软件了:

在 MATLAB 软件中:

① 打开程序编辑器, 编辑函数文件

```
for k=1:100000
    f=k-(floor(k/3)+floor(k/5)+floor(k/7)-
    floor(k/lcm(3,5))-floor(k/lcm(3,7))-floor(k/
    lcm(7,5))+floor(k/lcm(3,lcm(5,7))));
    if f==2011
        break;
    end
    k, f
end
```

② 保存文件 zhaof, 并且点击运行.

③ 命令窗口得到结果:

```
>> zhaof
k = 4394
f = 2010
k = 4395
f = 2010
k = 4396
f = 2010
```

命令当中 k 代表自然数 $1, 2, 3, 4, \dots$, f 代表了不能够被 3、5、7 整除剩下来的数重新排列的列数位置. 从执行的结果可以看出, 当自然数为 4394 时, f 就是 2010 的位置, 那么后面当自然数为 4395 时, 因为这个数能够被 5 整除, 所以位置没有增加, 所以, 他这里显示还是 2010 的位置, 同理 4396 也是如此.

我们可以对 4394 进行验证:

```
>> 4394-(floor(4394/3)+floor(4394/5)+fl
oor(4394/7)-floor(4394/15)-floor(4394/21)-
floor(4394/35)+floor(4394/105))
ans =      2010
```

可见结果的有效性.

解法 2: 1 到 105 的所有正整数当中, 共有 48 个与 105 互素,

```
function result = eulerformula(n)
% 欧拉函数,
% 1-n 且与 n 互素的个数,
result=n;
a=n;
i=2;
while i*i<=n
    if mod(a,i)==0
        result=result/i*(i-1);
        while mod(a,i)==0
            a=a/i;
        end
    end
    i=i+1;
end
if a>1
    result=result/a*(a-1);
end
end
```

执行上面的命令:

```
>> eulerformula(105)
ans =
    48
```

为了找出 1 到 105 的素数, 编写如下脚本:

```
A=[];
for i=1:105
    if gcd(i,105)==1
        A=[A,i];
    end
end
执行上面的命令, 得到 1 到 105 的素数:
>> find105
>> A
A =
1 至 11 列
1 2 4 8 11 13 16 17 19 22 23
12 至 22 列
26 29 31 32 34 37 38 41 43 44 46
```

23 至 33 列

47 52 53 58 59 61 62 64 67 68 71

34 至 44 列

73 74 76 79 82 83 86 88 89 92 94

45 至 48 列

97 101 103 104

发现第 42 个位置的数字是 89, 故

这些数从小到大排列为: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, \dots, a_{48} = 104$, 对于任意的 a_n , 我们的带余除法有: $a_n = 105q + r$, 这里的 q, r 是唯一的, $q > 0, 105 > r \geq 0$; 由于 $(a_n, 105) = 1$, 故, $(r, 105) = 1$; 从而 r 是 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, \dots, a_{48} = 104$, 中的一个;

$$2010 = 48 * (41) + (42)$$

故 $a_{2010} = 105 * (41) + a_{42}$, $a_{42} = 89$, 故 $a_{2010} = 105 * (41) + 89 = 4394$.

结语

尊重组合数学教育强调思维性的专业特征, 强调应用化的教育理念, 针对组合计数的实际应用和与计算机软件辅助结合的前提下, 实践是系统的、和目的性的。教学实践更是要求在一定的科学理论指导下完成的。课程不仅应该给学生以智慧, 它本身应当是智慧的。

参考文献

- [1] 卢开澄, 卢华明. 组合数学 (第 3 版) [M]. 清华大学出版社, 2021. 3.
- [2] 周枫, 强基计划真题解析 [M]. 西安出版社, 2022. 1.
- [3] 曹汝成, 组合数学 [M]. 华南理工大学出版社, 2012. 5.
- [4] 杨振生. 组合数学及其算法 [M]. 中国科学技术大学出版社, 2017.
- [5] 杨骅飞. 组合数学及其应用 [M]. 北京理工大学出版社, 2012.
- [6] 王玉梅. MATLAB 程序设计在数学建模中的应用 [J] 电子技术. 2013.
- [7] 余胜威. MATLAB 数学建模经典案例研究 [M]. 清华大学出版社, 2017.

基金项目: 广东省本科高校在线开放课程指导委员会 2022 年度研究课题, 编号: 2022ZXKC425.