探究高等数学教学中代数问题的几何求解思想

黄功宇

郑州电力职业技术学院公共教学部

摘　要：求解代数学问题过程中，直接去解要花上很多的时间和精力，却到最后也得不出结果。变换一种思路，把这些数字构造成一个几何问题，就会发现问题都变得明朗，这就是一种代数问题的几何求解思想。能使这些代数问题变得简单，从而达到事半功倍的效果。从构造几何图形这个角度出发，介绍这种思想应用在几个代数问题中的例子。

关键词：几何图形；代数问题；构造

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2024.12.073

引言

高等数学教学要拓展学生思维，深入分析教材内容，将数形结合思维融入问题探究中，图形构造是一种抽象且复杂的数学思想方法，利用图形构造法的关键在于如何巧妙地构造适宜图形而且能恰好与问题中的题设结合，如何有效培养学生胸中有图，图中有数的思想意识，达到真正学以致用的目的是当前亟待解决的问题。

一、几何图形构造法解代数问题

图形构造法，即构造一个符合题设条件的图形，利用几何性质简化解题过程的方法[1]。作为连接代数和几何的一个桥梁，构造图形是一个必经的渠道。如何构造一个符合题设条件的图形，并利用这个几何图形的性质来简化我们的解决问题的过程。这是一个值得深思的问题，更是一种数学思想。做好这一步，对于培养学生的创造性思维具有重要的意义。要想应用自如，首先必须知道各种几何图形所拥有的性质，特别是边的关系。分析好这些性质之后，我们再去联系所遇到的代数问题中的数据的特征，相应的去构造一个几何图形。再利用这个几何图形的性质去解决问题，把问题由“数”转化为“形”。图形构造法是一种抽象且复杂的数学思想方法，利用图形构造法的关键在于如何巧妙地构造适宜图形而且能恰好与问题中的题设结合。深入剖析问题条件与所求结论的内在关系，把问题与某个熟悉的图形联系起来，进行建立与题设相关的图形，往往能促使问题转化，使问题中原来互不相关的题设条件，通过构造数学模型，能够以模型的形式整体清晰地展现出来，这样就更便于直观地解决问题。

几何图形分为平面几何以及立体几何，在图形构造法中都有具体的应用。下面将以此为分类依据，逐个介绍各种图形的性质以及构造方法，并给出具体的例子。

（一）平面几何图形构造法解代数问题

1. 矩形构造法解代数问题

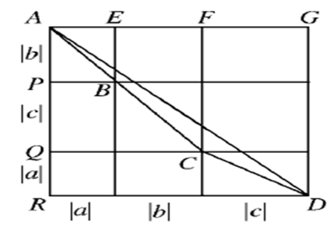
矩形构造法是将相应的代数问题构造为矩形，并利用矩形的一些性质来解题，使问题变得更容易处理，这里关于矩形定义与常见性质等我们不再赘述。

根据矩形性质和定理，为探究代数问题的几何求解思想，我们总结出比较典型的例题，并探讨了矩形构造法应用上的一些规律[2]。

例 1　已知 a，b，c ∈ R，求证：

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\ge\sqrt{2}\,|a+b+c|.$$

证明　观察原不等式含有 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的形式，联想到 $\sqrt{a^2+b^2}$ 可看成长宽分别为 a，b 的矩形的对角线，构造矩形如下图，



使 $AE=|a|$，$|EF|=|b|$，$|FG|=c|$，$|AP|=b$，$|PQ|=c$，$|QR|=|a|$，易知，AB= $\sqrt{a^2+b^2}$，BC= $\sqrt{b^2+c^2}$，CD= $\sqrt{c^2+a^2}$，AD= $\sqrt{2}(|a|+|b|+|c|)$，由两点之间直线段最短，可知 AB+BC+CD ≥ AD，即

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\ge\sqrt{2}(|a|+|b|+|c|).$$

又因为有 $|a+b+c|\ge|a|+|b|+|c|$，从而可知，

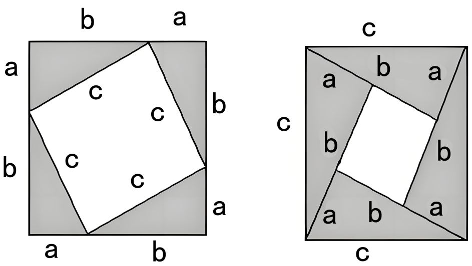
$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\ge\sqrt{2}\,|a+b+c|.$$

综合例的 1 问题发现，与矩形联系比较紧密的代数式是形如“$\sqrt{a^2+b^2}$”之类的，所以在解决问题时，对这种形式的式子保持敏感，能马上联想到这个就是矩形的对角线。从而构造出来相应的矩形，并利用矩形的性质来解题。

2. 正方形构造法解代数问题

正方形拥有很多独特的特点。而且很多代数问题也与正方形本身也有着千丝万缕的联系。根据文献 [4]、[5]，得出以下总结。

首先是正方形与勾股定理，如果单独来看，若把勾股定理中 $a^2+b^2=c^2$ 看作是一个等式，则也可用构造正方形的方法验证。在下图（左）中，$S_{大正}=(a+b)^2$，又 $S_{大正}=4\times\frac{1}{2}ab+c^2=c^2$。化简得 $a^2+b^2=c^2$。或者说，在下图（右）中 $S_{大正}=c^2$，又 $S_{大正}=4\times\frac{1}{2}ab+(b-a)^2$，化简得 $a^2+b^2=c^2$



其次是平方差公式，众所周知的平方差公式：

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$或 $(a+b)(a+b)=a^2-b^2$

如果试着用几何语言来解释如下：

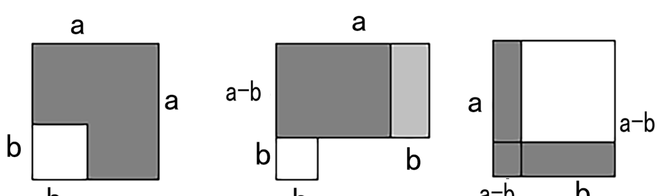


图1(1) 图1(2) 图2

图1（1）中$S_{阴影}=a^2-b^2$图1（2）中$S_{阴影}=S_{长方形}=(a+b)(a-b)$ ∴ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 图2中，$S_{阴影}=a^2-b^2$ 又 $S_{阴影}=a(a-b)+b(a-b)=(a+b)(a-b)$ ∴ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。

除此之外，还有完全平方公式：

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$或$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

用几何语言就是：在图3中$S_{正}=(a+b)^2$，又$S_{正}=a^2+2ab+b^2$ ∴ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。在图4中$S_{正}=(a+b)^2$，又$S_{正}=4ab+(b+a)^2=a^2+2ab+b^2$ ∴$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

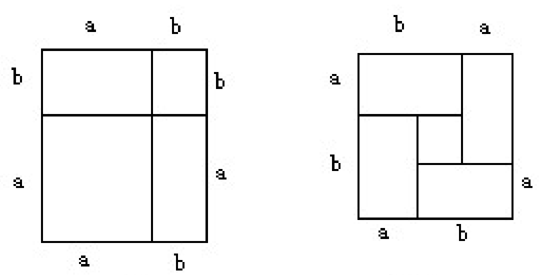


图3 图4

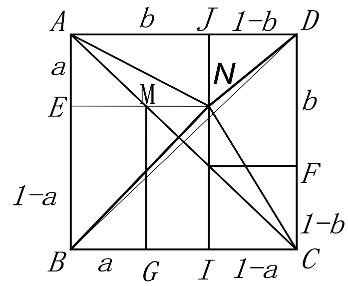
由此不难发现，正方形这个几何图形与“数”有着千丝万缕的联系。[2-5]

例2 已知a，b为小于1的正数，求证：

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\ge 2\sqrt{2}$$

分析：由不等式中的$\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{(1-a)^2+b^2}$，$\sqrt{a^2+(1-b)^2}$，$\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}$，我们联想到它们可以看成是求解直角三角形的斜边长。因为有$a+(1-a)=b+(1-b)=1$，$2\sqrt{2}$刚好是边长为1的正方形的斜边长度的2倍，所以我们想到可以类似例2构造正方形。

如在下图中，四边形$AENJ$，$EBGM$，$EBIN$都是长方形，并且满足$AE=BG=a$，$AJ=DF=b$。



解 由已知得，AN=$\sqrt{a^2+b^2}$，NC=$\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}$，AC=$\sqrt{2}$，BN=$\sqrt{(1-a)^2+b^2}$，ND=$\sqrt{a^2+(1-b)^2}$，AC=BD=$\sqrt{2}$，而从图4中，我们可以看出AN+NC>AC,BN+ND>BD，所以AN+NC+BN+ND>AC+BD，即

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\ge 2\sqrt{2}$$

而等号成立当且仅当N在AC上，即$a=b$。

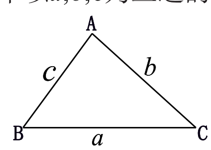
3. 三角形构造法解代数问题

与三角形联系最紧密当属勾股定理和三角函数。一般地在解决的问题中，含有代数式的平方和或问题中的一些条件能简化出代数式的平方和，这时可以转换思维，从几何的角度思考，利用勾股定理构造出三角形，这就是三角形构造法。[6]

例3 设a,b,c三个正数中任何两者之和大于第三者，求证：

$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$.

分析 从已知条件可得a,b,c三个正数任何两者之和大于第三者，这恰好符合三角形的三边的关系，自然而然地就联想到构造一个以a,b,c为三边的三角形，如图



由余弦定理得：

$\cos\angle C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<1$,

$(a^2+b^2-c^2)<2ab$ ①,

同理：

$(a^2+c^2-b^2)<2ac$ ②,

$(c^2+b^2-a^2)<2bc$ ③,

由①+②+③得：$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$.

（二）立体几何构造法解代数问题

在立体几何中，有些困难的问题，用构造法并利用几何体的特点和性质来帮助解决。常规的思考方法是由条件到结论的定向思维，构造性思想及其方法就是这样的一种手段。构造法在立体几何中主要表现在辅助线、体的添加。由于实际的三维图形，总是用二维图形来表示。这就造成识图、画图、用图的困难，这就要用运动的观点观察点、线、面的位置关系，使空间图形成思维对象。用构造法来解立体几何问题，实际上是将待解决问题的条件和数量关系，显示在所构造的“模型”上，

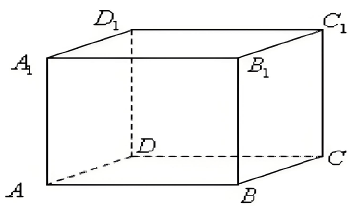
并且得到相应的解释，从而转化为所构造模型的相应问题，实现用简捷方法解复杂问题的目标。

1. 长方体构造法巧解代数问题

长方体的六个面都是矩形，每个顶点上的三条棱两两互相垂直．利用这些性质，构造长方体，常能使很多问题得到简化。

例 4 设α,β,γ均为锐角，且$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$。求证：$\alpha+\beta+\gamma<\frac{3}{4}\pi$。

证明 作长方体如图，使$B_1C_1=\sin\alpha$，$C_1D_1=\sin\beta$，$DD_1=\sin\gamma$，



由定理可知

$$AC_1=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}=1,$$

$$\sin\alpha=B_1C_1=\frac{B_1C_1}{AC_1}<\frac{B_1C_1}{A_1C_1}=\sin\angle B_1A_1C_1.$$

$$\sin\beta=C_1D_1=\frac{C_1D_1}{AC_1}<\frac{C_1D_1}{A_1C_1}=\sin\angle C_1A_1D_1.$$

$$\sin\gamma=DD_1=\frac{DD_1}{AC_1}<\frac{DD_1}{A_1C_1}=\sin\angle CA_1C_1.$$

$$\therefore\alpha+\beta+\gamma<\angle B_1A_1C_1+\angle C_1A_1D_1+\angle CA_1C_1$$

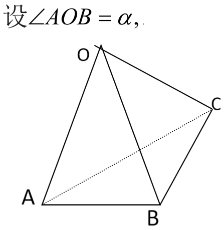
$<\frac{3}{4}\pi$．即$\alpha+\beta+\gamma<\frac{3}{4}\pi$

2. 棱锥构造法解决代数问题

对于有些问题，构造长方体是不能够解决问题的，有一个很重要的立体图形 --- 棱锥，下面是棱锥构造法的例子。

例 5 已知x,y,z为正数，$0<\alpha<\pi,0<\beta<\pi,0<\gamma<\pi,0<\alpha+\beta+\gamma<2\pi$，且$|\alpha-\beta|<\gamma<\alpha+\beta$。求证：$\sqrt{x^2-2xy\cos a+y^2}+\sqrt{x^2-2xz\cos\beta+z^2}>\sqrt{y^2-2yz\cos y+z^2}$

证明 如右图，构造三棱锥 O-ABC，设$\angle AOB=\alpha$，$\angle AOC=\beta,\angle BOC=\gamma$，且$OA=x,OB=y,OC=z$。则$AB=\sqrt{x^2-2xy\cos\alpha+y^2}$，$AC=\sqrt{x^2-2xy\cos\beta+y^2}$，$BC=\sqrt{y^2-2yz\cos\gamma+z^2}$．



在底面△ABC 中，由 AB+AC>BC，就可得所要证的不等式．

通过以上的例题，我们总结出了更一般的结论：

如取（1）$\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$,则有

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{x^2-xz+z^2}>\sqrt{y^2-yz+z^2};$$

（2）$\alpha=45^\circ$，$\beta=30^\circ$，$\gamma=60^\circ$,则有

$$\sqrt{x^2-\sqrt{2}xy+y^2}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}xz+z^2}>\sqrt{y^2-yz+z^2}.$$

二、几何图形构造法在解代数问题的教学实践中的应用

（一）几何图形构造法在解代数问题中的重要性

“数”与“形”作为数学中重要的两个方面，向来就是一对矛盾体，相互依存又相互独立。著名的数学家华罗庚先生曾经说过：“数与形本是相倚依，怎能分作两边飞，数缺形时少直觉，形少数时难入微，数形结合百般好，隔离分家万事休。切莫忘，几何代数统一体，永远联系，切莫分离！”寥寥数语，把数形之妙参得甚是通透。

“数形结合”作为数学中的一种重要思想，在中职和高职数学中占有极其重要的地位。在多年来的考题中，数形结合应用广泛，大多是“以形助数”，也就是构造几何图形解代数问题，比较常见的是在解方程和不等式、求函数的最值问题、求复数和三角函数等问题。构造几何图形解代数问题的研究对于数学教学来说意义非凡。

（二）几何图形构造法在解代数问题中的两个原则：

1. 等价原则

等价原则是指“数”的代数性质与“形”的几何的转化应是对应的，即对于所讨论的问题形与数所反映的对应关系应具有一致性。

2. 简单性原则

简单性原则是指数形转换时尽可能使构图简单合理，即使几何形象优美又使代数计算简洁。几何图形构造法解代数问题的思想是一种非常有用的数学方法，它能使复杂问题抽象问题变得简单具体。它对于我们进行数学解题和数学研究是非常有帮助的。

结语

因此，在平时的学习和研究中注意培养这种思想意识，真正做到胸中有图，图中有数，不断拓展我们的思维。在教学中要注重这种思想方法的培养，在培养学生数学思想的过程中，要深入地剖析教材内容以及其中的典例模型，将数形结合这种解决问题的思想融入于复杂问题中，在建立图形中让学生明白“数”与“形” 的相对性，让数与形有机地结合起来。让学生真正地将数形结合思想应用到解题当中去，真正地做到学以致用。

参考文献

[1] 范光中编．中学数学论证问答 [M]．西安：陕西人民出版社，1985：125-126.

[2] 王广新．构造图形——解决代数问题的新途径 [J]．河北理科教学研究，2007(02)：5-6.

[3] 彭翕成，张景中．仁者无敌面积法 [M]．上海教育出版社，2011.

[4] 董彪．浅议利用几何图形解决代数问题 [J]．阿坝师范高等专科科学校学报，2003(01)：101-104.

[5] 李耀文．利用构造正方形解竞赛题 [J]．中等数学，2012，(6)(06)：12-15.

[6] 陆桂云．构造几何图形解题 [J]．中学数学教学，1996(02)：25-26.

作者简介：黄功宇，1990 年生，男，汉族，河南信阳人，硕士研究生，主要研究方向：基础数学代数学。