基于波利亚解题思想对解题方法的探究
——以“分类讨论”方法为例

姚海龙
赤峰学院数学与计算机科学学院

摘　要：掌握众多的解题方法是学好数学的重要途径，波利亚的《怎样解题》中蕴含着丰富的数学知识与解题思维。本文主要讨论波利亚解题思想对中学数学解题的影响，并以“分类讨论”方法举例分析。“分类讨论”方法不仅是要求学生掌握的重点，更是难点，教师要通过有代表性的例题让学生养成分类讨论的能力，并带领学生进行大量练习，进而使学生熟练掌握“分类讨论”的方法。

关键词：波利亚；解题思想；解题方法；分类讨论
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2025.02.051

引言

在数学学习过程中，掌握有效的解题方法是提高成绩和培养数学思维的关键。波利亚作为著名的数学教育家，其解题思想对数学教学产生了深远的影响。他的《怎样解题》一书提出了著名的四步解题法，为数学教师提供了宝贵的教学指导。本文旨在深入探究波利亚的解题思想，并以“分类讨论”方法为例，分析其在中学数学解题中的应用。

一、波利亚的解题思想

在波利亚的教学名著《怎样解题》中，波利亚将本书的解题精华置于首页，即著名的四步解题法，具体见表 1。该表是波利亚在分解题目的过程中得到的，看似很平常的解题步骤或方法，却已饱含几代人的智慧结晶和经验总结。在这张包括“理解题目”“拟定方案”“执行方案”和“回顾反思”四步骤的解题表中，对第二步即“拟定计划”的分析是最为引人入胜的。他把寻找并发现解法的思维过程分解为五条建议和二十三个具有启发性的问题。就好比是对寻找和发现解法的思维过程进行分解，使我们对解题的思维过程看得见，摸得着，易于操作。[1]

表 1 怎样解题表

理解题目	要求的未知量是什么？已知数据是什么？条件是什么？条件有可能满足吗？目前的已知数据和条件是否足以推出未知量？有时候可能需要画一张图并在图上标示未知量和已知数据，并选择一些符号来表示它们。
拟定方案	能否想到近似的题目、可能有用的定理？所有的已知数据和条件的用处是什么？有没有可能引入辅助元素？有没有可能先满足部分条件？
执行方案	执行拟定的方案，保证每一步都是正确的，有必要的话去证明每一步都是正确的。
回顾	能够对结果进行检验吗？能以不同的方式推导这个结果吗？能够对题目进行变形吗？

二、选题背景

在小学阶段，学生们所学习的数学问题几乎都是一道题目对应一个答案，所以在脑海中早已经形成思维定势。然而初中第一次接触多解问题，在思维上与以往的经验产生了排斥，所以在短时间内无法理解，大多数学生都是死记硬背，这样做只是“治标不治本”的做法，学生还是无法理解多解问题的意义与解决方法。其实，正是因为多解问题的答案不唯一，学生们必须养成多角度、全方位思考问题的好习惯，而养成这些好习惯的重要途径就是学会分类讨论，使学生看待问题条理清晰，认识到每一道题目的多样性，培养学生的发散思维。

三、掌握“分类讨论”解题方法的必要性

数学分类讨论具有重要的意义。首先，它可以帮助学生更好地理解和解决问题。许多数学问题是较复杂的，需要从多个方面考虑和分析。通过将问题分类，我们可以将复杂的问题转化为多个更易处理的小问题。在针对每个小问题使用不同的方法和策略时，我们能够分步解决问题，而不是被整个问题的复杂度所困扰。其次，数学分类讨论还可以帮助我们更深入地理解数学概念和原理。对于许多数学概念和原理，它们可能存在多种不同的情况。通过对数学概念和原理不同情况的分类讨论，可以更全面地掌握概念和原理的本质和应用。这种深入的理解不仅可以提高我们的解题能力，还可以使我们在应用数学知识时更加自如和灵活。最后，数学分类讨论还可以帮助我们发展严密的逻辑思维能力。通过将问题分类，我们需要对每个小问题进行仔细的思考和分析。这需要我们具备清晰、严密的逻辑思维能力。而上述的波利亚解题思想主要强调通过探索和实践来建立数学概念和方法，他鼓励学生思考问题的背后原理，并培养他们对问题的深入理解和观察力。同时鼓励学生主动学习和思考，培养自主学习能力。通过自主解决问题，学生能够更好地发展解决实际问题的能力，提高学习的积极性和自信心。可以说，分类讨论解题方法与波利亚的解题思想在帮助教师与学生在数学解题过程中都有着不可估量的作用。因此，本文将波利亚解题思想运用于分类讨论思想解决数学问题，进而达到上述目标。

四、试题呈现

（一）函数中的取值问题

例　已知函数 $f(x)=\cos^2 x+a\sin x-a^2+2a+5$ 有最大值为 2，计算实数 a 的取值。[2]

解题分析：

①理解题目。通过观察条件，我们很明显地看到，

这是一道有关函数最值的问题。未知量是实数 a 的取值；已知量是函数$f(x)=\cos^2 x+a\sin x-a^2+2a+5$，条件是这个函数有最大值 2。很明显通过现有的条件和已知量还无法确定未知量。

②拟定方案。我们可以尝试想一下以前是否见过这样的题，通过观察这个函数，我们能够发现这是一个关于三角函数的解析式，所以这时我们就想到中学阶段学习的有关三角函数的公式，经过数次尝试变形后，我们应该能够发现需要使用公式$\sin^2 x+\cos^2 x=1$来进行变形。变形之后也只是将它进行了化简，距离解出这道题的未知量还需要再次转换思路。题目的条件中提到了最值问题，并且$\sin x$与 a 都有以平方的形式出现了。那我们能够想到二次函数的顶点式，因为二次函数的顶点式自变量的次数是 2，并且能够直接反应二次函数的最值，所以要尝试将函数化为二次函数的顶点式，即$y=a(x-h)^2+k$的形式，顶点为(h,k)（前提是 h 在 x 的定义域内）。如果 x=h 不在 x 的定义域内，此时我们便需要分类讨论。

③执行方案。$f(x)=1-\sin^2 x+a\sin x-a^2+2a+5$

$$=-\left(\sin x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{3}{4}a^2+2a+6$$

令$\sin x=t$

则函数$f(x)$变为了一个新的函数

$$g(t)=-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{3}{4}a^2+2a+6$$

因为$\sin x$的取值范围为$[-1,1]$，所以 t 的取值范围即$g(t)$的定义域也是$[-1,1]$

此题想讨论$f(x)$的最大值，即讨论$g(t)$的最大值，观察式子得到，$-\frac{3}{4}a^2+2a+6$为常数，想使$g(t)$取得最大值，便需要使$-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2$最大，即$\left(t-\frac{a}{2}\right)^2$最小，那此时就需要分类讨论。

（1）当$\frac{a}{2}>t_{\max}$时，t 在定义域内取最大值，此时函数$g(t)$有最大值 2。

所以将$t=1$代入解析式得

$$g(1)=-\left(1-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{3}{4}a^2+2a+6=2$$

计算得到$a=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$或$a=\frac{3-\sqrt{21}}{2}$（不合题意，舍去）

（2）当$\frac{a}{2}$在 t 的定义域内时，t 在$\frac{a}{2}$处取最大值，此时函数$g(t)$有最大值 2。

所以将$t=\frac{a}{2}$代入解析式得

$$g\left(\frac{a}{2}\right)=-\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{3}{4}a^2+2a+6=2$$

计算得到$a=-\frac{4}{3}$或$a=4$（不合题意，舍去）

（3）当$\frac{a}{2}<t_{\min}$时，t 在定义域内取最小值，此时函数$g(t)$有最大值 2。

所以将$t=-1$代入解析式得

$$g(-1)=-\left(-1-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{3}{4}a^2+2a+6=2$$

计算得到$a=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$（不合题意，舍去）或$a=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$（不合题意，舍去）

综上所述，实数 a 的取值为$\frac{3+\sqrt{21}}{2}$或$-\frac{4}{3}$

④回顾。检验结果：由于 a 的取值在不同情况下有不同的取值，所以在验证的时候也需要在不同的情况下进行验证，首先当$\frac{a}{2}>1$时，$a=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$，使得$f(x)$有最大值。将$a=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$代入到$f(x)$中，得，

$$f(x)=-\left(\sin x-\frac{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\times\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^2+2\times\frac{3+\sqrt{21}}{2}+6$$

前提条件$t=\sin x=1$，此时计算得到$f(x)=2$；当$-1<\frac{a}{2}<1$时，$a=-\frac{4}{3}$，使得$f(x)$有最大值。将$a=-\frac{4}{3}$带入到$f(x)$中，得到

$$f(x)=-\left(\sin x-\frac{-\frac{4}{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{4}{3}\right)^2+2\times\left(-\frac{4}{3}\right)+6,$$

前提条件为$t=\frac{a}{2}=-\frac{2}{3}$，此时计算得到$f(x)=2$，验证完毕。

该题目很明显利用了分类讨论的思想，这是在数学解题中常用的解题方法，关键在于找到$\frac{a}{2}$与 t 的定义域之间的关系，分别与 t 的左边界、右边界和定义域进行比较，再将不符合题意的答案舍去。由于题目中给出一个较为明显的提示——最值，于是让我们想到将其化成二次函数的顶点式。所以，以后再遇到最值问题，可以尝试替换和变形其中的未知量，化为顶点式。学生在首次遇到这种类型题时可能无从下手，教师可以巧妙的给予相应的提示，而不能直接告知解决的方法，通过有技巧性的提问，让学生逐渐懂得分类讨论思想在函数中的取值问题的应用，以便以后再做同种类型题目时，能够有所进步。

（二）几何中的作图问题

例：在等腰三角形ABC中，AB=3，BC=4，求∠B的余弦值？

解题分析：

①理解题目。阅读完题目后，我们能发现未知量是∠B 的余弦值，已知量是三角形 ABC 为等腰三角形，条件是 AB=3，BC=4，题目中并没有给出图形，而是用了一段文字来叙述，所以这道题目需要我们自己去画出图形，根据现有的条件并不能直接得到答案。

②拟定方案。通过努力回想以前学习的内容，可以通过两种方式去计算未知角的余弦值。分别是将未知角置于直角三角形中，已知直角三角形三边的长度后，利

用定义去计算。或者不论三角形为哪种形状的三角形，只需知道三角形三条边的长度，利用余弦定理的公式去求未知角的余弦值。不论使用哪种方法都需要借助图形，但是这道题目并没有给出图形，所以我们的首要任务是先画出符合题意的几何图形。三角形 ABC 中只有三条边，分别为 AB、AC 和 BC，题目中已经给出 AB 和 BC 的长度，所以我们只需要找到 AC 的长度便可以了。因为三角形 ABC 为等腰三角形，所以一定有两条边相等，已知 AB 不等于 BC，所以此时需要分类讨论。当 AB=AC 时和 BC=AC 时，图形的画法以及不同图形下∠B 的余弦值。

③执行方案。因为三角形 ABC 为等腰三角形，且 AB=3，BC=4，所以 AC 的长度是无法确定的，此时开始分类讨论。

（1）当 AB=AC=3 时，可以画出如图 1 的三角形。过点 A 作 AD 垂直 BC，垂足为 D。因为三角形 ABC 为等腰三角形，且 AD⊥BC，所以 D 为 BC 中点。

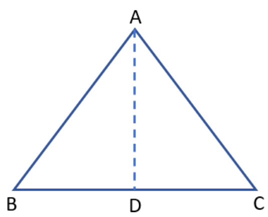

图 1

所以$BD=\frac{1}{2}BC=2$

所以在直角三角形 ABD 中，$\cos B=\frac{BD}{AB}=\frac{2}{3}$

（2）当 BC=AC=4 时，可以画出如图 2 的三角形。过点 C 作 CE 垂直 AB，垂足为 E。因为三角形 ABC 为等腰三角形，且 CE⊥BA，所以 E 为 BA 中点。

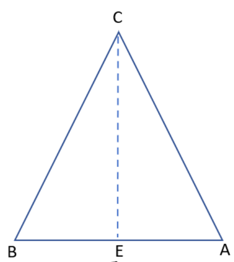

图 2

所以$BE=\frac{1}{2}BA=\frac{3}{2}$

所以在直角三角形 BCE 中，$\cos B=\frac{BE}{BC}=\frac{3}{8}$

综上所述：∠B 的余弦值为$\frac{2}{3}$或$\frac{3}{8}$。

④回顾：在拟定方案中已经讲述过求未知角的余弦值的方法，在用以上在直角三角形中画图求解以外，还可以在已知三边长度的情况下使用余弦定理。并且在刚才的解题过程中，我们也画出了符合题意的两种情况的图形，所以我们可以采用余弦定理的方法来验证我们刚才所求解的答案。

（1）当 AB=AC=3 时，过点 A 作 AD 垂直 BC，垂足为 D。

因为三角形 ABC 为等腰三角形，且 AD⊥BC，所以 D 为 BC 中点。所以 BD=$\frac{1}{2}$BC=2。

在直角三角形 ABD 中使用勾股定理得：$AB^2=BD^2+AD^2$，$AD^2=AB^2-BD^2$，所以 AD=$\sqrt{5}$。

所以在三角形 ABD 中，使用余弦定理可以得到

$$\cos B=\frac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}=\frac{3^2+2^2-\sqrt{5}^2}{2\times3\times2}=\frac{2}{3}$$

（2）当 BC=AC=4 时，过点 C 作 CE 垂直 BA，垂足为 E。

因为三角形 ABC 为等腰三角形，且 CE⊥BA，所以 E 为 BA 中点。所以 BE=$\frac{1}{2}$BA=$\frac{3}{2}$。

在直角三角形 BCE 中使用勾股定理得：$BC^2=BE^2+CE^2$ $CE^2=BC^2-BE^2$，所以 CE=$\frac{\sqrt{55}}{2}$。

所以在三角形 BCE 中，使用余弦定理可以得到

$$\cos B=\frac{BC^2+BE^2-CE^2}{2BC\cdot BE}=\frac{4^2+\frac{3}{2}^2-\frac{\sqrt{55}}{2}^2}{2\times4\times\frac{3}{2}}=\frac{3}{8}$$

通过另一种方法的计算和实施，也能得到我们的计算结果是正确的。这是一道几何计算中的分类讨论题，大多数的几何题目，都是不能脱离图形的，所以经过这道题目，同学们应该懂得在做几何题时要仔细观察图形，题目中的条件要和图形一一对应去认真理解分析，如果题目中没有直接给出图形，那就有可能需要自行画图，有时候题目中的已知条件无法让我们画出一个确定的图形，这个时候可能就需要去分类讨论，讨论图形的画法以及讨论不同图形中未知量的解法。

结语

好多事物并不是只有一种形态，好多问题也并不是只有一种答案，所以培养学生分类讨论的思想是必然的要求。在这里，对如何培养和发展学生分类讨论的思想提出几点建议。

首先，要强调分类思维的重要性。[3] 分类思维是一种重要的思维方式，能够帮助学生更好地理解和解决问题。教师可以在课堂上强调分类思维在不同学科领域的应用，鼓励学生在学习中采用分类思维。教师可以提供一些具体的分类讨论范例，例如讨论三角形的分类等，以帮助学生理解分类思维的应用。

其次，鼓励学生自主分类。在课堂上，教师可以提供一些问题或情境，鼓励学生自主进行分类讨论。这样能够帮助学生锻炼分类思维的能力，还能够增强学生对知识的理解。同时要注重探究过程。分类讨论不仅要注重结果，更要注重探究过程，在分类讨论的过程中，教师可以引导学生提出问题、收集信息、分类讨论、总结结论等，帮助学生形成系统的思维方式。

最后，教师可以采用多样化的教学方法，例如小组讨论、案例教学、角色扮演等，以激发学生的兴趣，促进学生分类讨论思想的形成。同时，教师也要注意区分学生的能力水平，采用适当且多样的教学方法和难度适宜的讨论题目。[4]

参考文献

[1]［美］波利亚著．怎样解题 [M]．涂泓，冯承天，译．上海：上海科技教育出版社，2011：82-83.

[2] 娄爱玉．分类讨论思想在解题中的应用 [J]．数理天地（高中版），2023(05)：4-5.

[3] 徐水花．初中数学分类讨论思想运用原则与学习策略 [J]．现代中学生（初中版），2023(06)：11-12.

[4] 龚剑，马明颖．初中数学问题中分类讨论思想的运用 [J]．现代中学生（初中版），2023(06)：23-24.

作者简介：姚海龙（2000.10-），男，黑龙江哈尔滨人，汉族，赤峰学院数学与计算机科学学院，硕士研究生，研究方向：数学教育。