独立院校近世代数课程教学改革的实践与思考

刘伟
天津师范大学津沽学院

摘　要：近世代数作为应用数学专业的基础课程，对培养学生的数学抽象思维、逻辑推理能力有重要的作用。但是对于独立院校数学专业学生而言，其基础普遍较差，学好这门课程存在较大困难。教师在进行教学设计时，要巧妙借助初等数学中的实例来优化教学。本文将以群的概念为例，结合数学学习论理论，给出相关的教学建议，从而达到提高教学质量的目的。

关键词：独立院校；近世代数；群；有意义学习

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2025.06.128

引言

独立学院作为我国高等教育的重要组成部分，在高等教育大众化的进程中发挥了不可或缺的作用[1-2]。但是独立学院的学生学习基础普遍较弱，无法与一般的本科院校生源相比，因此对于独立学院而言，多是以培养本科层次的应用型人才为培养定位。因此要围绕应用型人才培养目标，制定教学方案，因材施教，而不是照搬母体校培养方案和教学模式，才能取得较好的教学效果。

以我院数学专业为例，学生多来自西部，因此在制定培养计划时结合学生的实际情况进行了调整，减少了一些难度较大的课程。虽然减少了一些难度较大的课程，但是对于保留的课程而言，其配套教材多数原是为普通本科院校数学专业学生而编写的，且出版年代较早，对于独立学院学生而言，内容依然有些偏难。但是由于国内独立院校的数学专业招生较少，还没有供数学专业课程使用的教材面世。这就要求教师在使教学时对所用教材要有适当取舍，并增加一些辅助性的内容，以便更好地适合教学。本文将针对近世代数这门课程的部分内容，谈谈独立院校是如何进行教学改革的。

一、近世代数课程介绍

近世代数是现代数学的一个重要分支，相比数学分析等课程而言，抽象程度明显提高。在本科阶段，它主要研究三种代数结构，即群、环、域，以及在这些结构中保持运算的映射（称为态射）。

近世代数是数学专业高年级课程，一般三年级学习该课程。如果说学生学习的数学分析还是近四百年前的数学，那么近世代数则是一门只有一百余年历史的崭新的数学分支，算是一门现代数学。这也就是近世代数(modern algebra)名称由来的原因。该课程在培养学生数学思维，使学生从高观点去指导中小学教学有着很大帮助。

近世代数难学难教的原因在于其抽象性，该课程名字有代数，但看起来和学生学过的初等代数相去甚远。虽然学生在一年级学习了高等代数，但是近世代数的抽象性仍远高于高等代数，这门课一开始就重新定义了中小学里学过的乘法，很多抽象的代数结构，那么何为代数结构（或称为代数系统）呢？它是指具有代数运算的集合。集合这个概念在中学就已经涉及，但是从运算的角度来研究集合，中学生还很少接触，在高等代数中有所涉及。

目前国内编写的近世代数教程，如教材[3-4]，这些教材编写时间均较早，内容精炼，虽然能够很好地培养学生抽象思维能力，但是教材中的实例太少，学生阅读理解教材有一定的困难，从而导致学习效果不佳。作为独立院校的学生，其数学基础要弱于普通院校的学生。因此教学中要更多地考虑到学生的基础，对现有使用教材进行取舍，更要结合数学的学习理论去设计针对独立学院学生的教学设计。

二、近世代数教学研究现状综述

由于近世代数是一门难教难学的课程，查阅中国知网，可以检索到很多对于该课程的教学有很多研究，下面选择一些有代表性的文章进行综述。

郭华光[5]等指出多数近世代数教材在编写时，多按照公理化的方式，即“定义—假设—定理—证明—推论”的形式来安排内容，这样数学知识的来龙去脉给隐藏了，学生想学习起来就感到困难。虽教师教学时要尽量从学生已经学习过的知识中，去寻找实例，让学生头脑中已有的知识去建构新的概念。

陈全国，滕云玲[6]结合地方师范学院特点，总结了该课程难学难教的原因，一是课程内容抽象，二是学生基础薄弱，自学能力差。因此要找到合适的教学方法，主要的方法是找出一些中学的实例，从这些实例中去引出近世代数的相关概念。

黄影[7]等指出部分教师在教学很少关注从学生熟知的中学数学例子引入教学内容，从而影响了教学效果。他们采用探究式教学方法，引导学生去发现与之相关的

近世代数的概念或结论。这样做不但提高了学生的学习效果，还提高了学生的数学能力。

总之关于近世代数教学研究的论文,多是先从教材、教师、学生的角度分析课程难学难教的原因，教学改革的方法多是提倡教师不要照本宣科，多开发一些初等数学实例来帮助学生学习。

三、群的概念教学难点分析

群是学生学习近世代数时遇到的第一个代数结构。如果学生能够学好这一部分内容，就基本上掌握了学习近世代数的方法，为后面学习环论、域论打好基础。近世代数的核心内容是研究抽象的代数结构和态射，群的学习分成两部分，第一部分是与群相关的概念，第二部分是各种群之间的态射（同态与同构）。

学生在中学里学习数学时，对于公理化内容接触较少。而教科书对于群的内容，几乎都是以公理化的形式编排,对于学生来说,缺少了一个学习过程上的过渡阶段。尤其是独立院校的学生，他们的归纳推理能力、空间想象能力和抽象思维能力都是比较弱的，学生接受这门课程内容的难度要大于大一大二所学的专业课。下面具体分析教学难点。

（一）从认知接受理论角度分析

奥苏贝尔[8]认为，学习过程是在原有认知结构的基础上形成新的认知结构的过程。因此对于学生而言，其头脑中原有的数学认知结构对于近世代数，这一新的知识的学习是一个最关键的因素。对于大学的数学专业课程学习而言，有意义的接受学习是最主要的形式。也就是要使该课程中抽象的符号代表的新知识与学习者认知结构中已有的适当知识建立非人为的、实质性的联系[9]。所以教师在教授这门课程时，应该认真考虑学生的认知结构中，哪些知识能够可以同化新的知识，从而使得学生较为容易的学习新知识。

“群”抽象难懂，其实中小学里学过的好多知识可作为“群”的直观模型。如各种数集以及数集中数的加减乘除四则运算，到了大学又接触矩阵运算、微分运算、积分运算等。学生对这些集合与运算是熟悉的，缺少的是从运算角度看集合。

因此群教学的关键点是引导学生观察归纳这些带有运算的集合的共同点，抽象出这些带有运算的集合的共同特点，进而得出群这个概念。这需要学生具有很好归纳与抽象能力。独立院校的学生在这方面是有所欠缺的。如果教师在教学照本宣科，一开始就是定义 - 定理 - 例题的教学模式，直接给出群的概念。这种教学方式正如奥苏贝尔所认为的机械学习，这样的话，学生即使记住了群的概念，但很可能只是记住了“乘法”“封闭”“单位元”这些名词以及这些名词的组合，但不能理解有符号所代表的知识。更无法在新知识（群）与旧知识（带有运算的数集）之间建立非人为和实质性的联系。因此造成了学习上的困难。

（二）结合几何直观角度分析

数学来源于现实世界，现实世界充满了几何元素，很多抽象的代数概念其实也有直观的几何背景。几何直观是一种思维形式，可以帮助学生更好的理解抽象的数学内容[10]。近世代数，虽然是代数学，但是群也有很直观的几何背景。“群即对称”[11]就是说明群这个概念，如何刻画几何中的对称现象。可见抽象的群概念依然具有现实的几何基础，所以教师在教学时要注重几何直观在群论学习中的重要性。独立院校的学生基础较弱，理解抽象尤其是对于独立学院的学生而言，其抽象概括能力弱于普通院校的学生，更要很好的利用几何中的对称现象，来帮助学生去理解群这个概念。从另外一个角度而言，借助数集而引出的群，基本上都是无限循环群，但是群中还有有限群，置换群，非交换群，这些群都很难从数集中去寻找实例，而借助几何直观引出的 3 次对称群 S_3，既是有限群，又是非交换群，变换群，置换群，对称群。这一个来自几何的直观实例，可以作为多种具体的群的直观模型，从而降低学生学习过程中的困难。

四、对群的概念教学的改革与实践

（一）教学改革的总体思路

目前国内没有专门针对独立院校的近世代数教材，我院采用杨子胥[12]编写的近世代数教材。该教材虽然比教材[3-4]要相对简单，但对独立院校学生而言，内容还是偏多偏难，须对教材内容进行适当取舍。目前只能较为完整的讲授第一、二章（基本概念，群），后面四章（正规子群和有限群，环与域，因子分解，域的扩张）只讲授部分内容。该课程整体的教学设计思路是基于有意义学习理论，关注每一节所涉及的抽象的概念，如群、循环群等概念的初等解释，关注这些概念的形成过程，充分借助学生认知结构中已有的带有运算的集合，帮助学生形成新知识。

群的教学难点之一在于帮助学生去理解新知识与中小学知识之间的联系，寻找初等例子解释抽象的群知识，用直观的几何背景去理解群的知识。教师要通过例子来帮学生理解概念，带领学生归纳抽象出群的概念，并给出一些较为复杂例题来帮助学生巩固概念，从而达到有意义学习。这样一个完整的学习过程，让学生更好地理解掌握群的概念，也给后面内容的学习下基础，教会学生按照学习群的方法，学习课上未能讲解的只是，提高自学能力，这才是最终的教学目的。

（二）教学改革建议

1. 概念的引入

问题 1　请观察 Z,Q^*,R^* 中的数，关于加法运算有何特点。

整数集、实数集，这是在中学里学过的。而对于“群”，以及群中的“乘法”、“单位元”、“可逆元”对学生来讲则是一个抽象的符号，教师的教学就是要抽象的名词和中小学里学过的具体对象进行匹配，让学生知道这些抽象的数学对象，在中小学里面已经学习过了。有意义接受学习理论指出，要想使学生能进行有意义学习，需要学生具有意义学习的心向，也就是具有将新内容与以前学过内容联系起来的愿望。所以教师要带着学生复习旧的知识，要对之前的学习有所提高，要让学生在旧知识里面找到新的内容。

如何让学生对旧知识的认识有所提高呢？关键是学生归纳这些不同数集之间运算的共同点。并用符号语言来表示。教师引导学生得出如下形式的结论：

$\forall m,n,l\in\mathbf{N}$，有 $m+n\in\mathbf{N}$，$(m+n)+l=m+(n+l)$，$m+0=0+m=m$，$m+(-m)=0$

$\forall a,b,c\in\mathbf{R}$，有 $a\times b\in\mathbf{R}$，$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$，$m\times 1=1\times m=m$，$m\times\dfrac{1}{m}=1$

虽然这些集合是不同，运算不同，但都满足集合对运算封闭，运算满足结合律，有单位元，每个元素有逆元。

问题 2　观察 n 阶方阵做成的集合 $M_n(\mathbf{R})$，闭区间 $[a,b]$ 上的全体连续函数 $C[a,b]$，对于矩阵的加法，函数的加法，是否像数集一样，有上述四条性质？

大学里学生接触很多新的带有运算的集合，这些集合，是否也和数集一样，具有第一个问题里学生得出的结论？这个问题的设置是为了引导学生去研究难度较大的集合，让学生进一步去体会，近世代数是研究带有运算的集合，集合不一定是数集，运算也不再局限于数的运算。以便进一步引出群的概念。由于这个问题中涉及的集合和运算对于学生而言，就不像数集那样熟悉，因此教学时教师要加强引导。

2. 概念的形成

问题 1　回顾之前学习过的集合，找出哪些集合对于哪种运算可以做成群？

在上一环节教学中，是教师给出例子，让学生自己去探索发现共性。现在给出概念之后，由学生自己举例，这样做可以强化学生对概念的理解。

问题 2　设 G 为整数集。问：G 对运算 $a\circ b=a+b+4$ 是否做成群？

在近世代数中，会出现一些新定义的运算。学生很难理解，设计该问题目的是让学生对新定义的运算有所了解，去研究在这种定义之下，集合是否做成群。

教师给出一些例子，通过这样一系列的问题，带领学生观察、归纳、抽象，帮助学生在原有数学认知结构的基础上，得到新的数学知识——群。这样学生对群概念的理解就不会那么突兀，避免产生从天而降的感觉。

结语

通过教学实践，这种通过带领学生观察初等数学实例引出群的概念的教学方式取得了较好的效果。在两个课时内，通过教师的引导，多数学生能参与课堂活动中来，基本能够完成教学任务。并且这种教学方式，学生不仅仅只获得了知识，而且感受了近世代数中概念的来源。群论部分的其他小节的教学方式，也与第一节类似，通过这样的方式，完成了群论的学习后，学生就能够基本上了解近世代数的学习方法，同时也有助于提高学生的数学素养，为后面进一步学习环论、域论打下基础。

参考文献

[1] 罗世全，胡白云．独立学院课堂教学质量的现状与改进思路 [J]. 民办高等教育研究，2006(01):21-25.

[2] 王建芳，盛楠楠．独立学院公共选修课课程体系构建研究——基于应用型人才培养目标 [J]. 当代教育理论与实践，2016,8(12):71-73.

[3] 张禾瑞著．近世代数基础 1978 年修订本 [M]. 北京：人民教育出版社．1978.

[4] 吴品三编．近世代数 [M]. 北京：高等教育出版社．1979.

[5] 郭华光，徐祥，裴定一．近世代数课程教学内容的改革与实践 [J]. 广州大学学报（自然科学版），2003(06):587-590.

[6] 陈全国，滕云玲．关于近世代数教学的思考——以伊犁师范学院为例 [J]. 聊城大学学报（自然科学版），2012,25(03):66-68.

[7] 黄影，张丽华，李同兴，孟宪吉．探究式教学法在近世代数中的构建与应用 [J]. 曲阜师范大学学报（自然科学版），2019,45(01):117-120.

[8] 孔凡哲，曾峥．数学学习心理学 [M]. 北京：北京大学出版社，2009：47.

[9] 郭玉峰，刘春艳，程国红．数学学习论 [M]. 北京：北京师范大学出版社：2015:49.

[10] 蒋文蔚．几何直观思维在科学研究及数学教学中的作用 [J]. 数学教育学报，1997,6（4）：67-71.

[11] 顾沛．对称与群 [M]. 北京：高等教育出版社．2011:2.

[12] 杨子胥．近世代数 [M]. 北京：高等教育出版社．2011.

基金项目：天津师范大学津沽学院教育教学研究课题“数学专业学生抽象能力的教学探索与研究——以近世代数课程为例”，项目号 JKX1606532。