对两类曲线积分之间的联系的推导修正

周智华
怀化学院数学与计算科学学院

摘　要：数学推导是通过使用已知的事实、定义、公理和定理进行逻辑推理，得出新的数学结论。数学推导的过程通常是严密的、逻辑一致的、符合逻辑的，以确保得出的结论是可靠的、准确的。总之，数学推导是一种思考和推理过程，它基于已知事实和先前得到的结论，通过逻辑推理来得出新的结论。由同济大学数学科学院编，高等教育出版社出版的第八版《高等数学》下册的教材中，关于两类曲线积分之间的联系的数学推导存在缺陷，本文修正了这方面的缺陷。

关键词：曲线积分；弧微分；曲线弧；切向量；逻辑
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2025.08.077

引言

数学推导是通过使用已知的事实、定义、公理和定理进行逻辑推理，得出新的数学结论。数学推导的过程通常是严密的、逻辑一致的、符合逻辑的，以确保得出的结论是可靠的、准确的。总之，数学推导是一种思考和推理过程，它基于已知事实和先前得到的结论，通过逻辑推理来得出新的结论。[1]

抽象并非数学独有的特性，但数学的抽象却是最为典型的。数学的抽象在数与形等原始概念的形成中已经体现出来，并且经过一系列阶段而达到了远远超过其他知识领域的程度。数学的抽象舍弃了事物的其他一切方面而仅保留某种关系或结构；同时，不仅数学的概念是抽象的，而且数学的方法也是抽象的。从古希腊时代起，数学就使用一种特有的逻辑推理规则，来达到确定无疑的论结。这种推理方式具有这样的严密性，对于每个懂得它的人来说都是无可争辩的，因而其结论也是无可争辩的。这种推理模式赋予数学以其他科学不能比拟的精确性，成为人类思维方法的一种典范，并日益渗透到其他知识领域，此乃数学影响于人类文化的突出方面之一。[2] 由于数学的高度抽象性，有时会导致论证不完善、出现偏差和缺陷。

例如，由中华人民共和国教育部主管，华中师范大学、湖北省数学学会和武汉数学学会主办的数学期刊《数学通讯》上发表的两篇论文，《对人教 A 版普通高中教科书（数学. 必修. 第一册）的几点修改建议》，作者：董立伟，山西，2021 年。《对 2019 人教 A 版数学必修第一册潮汐问题的修正》，作者：周园，广东，2022 年。这些都说明了教材并不是尽善尽美的，有待改进和完善。

由同济大学数学科学院编，高等教育出版社出版的第八版《高等数学》下册的教材中，平面曲线 L 上的两类曲线积分之间的联系 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ $=\int_L (P(x,y)cos\ \alpha+Q(x,y)cos\ \beta)\,ds$ 是未知的，是需要探求才能得出的结论，但此教材却以此结论为依据，来推导平面曲线 L 上的两类曲线积分之间的联系

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)\}\,dt$$

对弧长的曲线积分为 $\int_L (P(x,y)+Q(x,y))\,ds$

$$\int_L (P(x,y)cos\ \alpha+Q(x,y)cos\ \beta)\,ds \tag{1}$$

$$=\int_\alpha^\beta \left\{P(\varphi(t),\psi(t))\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\right.$$

$$\left.+Q(\varphi(t),\psi(t))\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\right\}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)\}\,dt$$

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$= \int_L (P(x,y)cos\ \alpha + Q(x,y)cos\ \beta)\, ds \quad (2)$$ [3]

由 (1) 到 (2) 这样的推导，以未知的结论为依据来推导，逻辑欠妥当，也没有多少意义。

理论计算和结论

设有向曲线弧 L 的起点为 A，终点为 B，曲线弧 L 的参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

给出，起点 A、终点 B、分别对应参数 α、β. 不妨设 α<β，（若 α>β，可令 $s=-t$，A、B 对应 $s=-\alpha$、$s=-\beta$，就有 (-α)<(-β)，把下面的讨论对参数 s 进行即可），并设函数 φ(t)、ψ(t) 在闭区间 [α, β] 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2+\psi'^2\neq 0$，又由于函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在 L 上连续。于是，对坐标的曲线积分的计算公式有

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)\}\,dt \quad (3)$$

我们知道，向量 $\tau=\varphi'(t)i+\psi'(t)j$ 是曲线弧 L 在点 $M(\varphi(t),\psi(t))$ 处的一个切向量，它的指向与参数 t 的增长方向一致，当 α<β 时，这个指向就是有向曲线弧 L 的方向。以后我们称这种指向与有向曲线弧的方向一致的切向量为有向曲线弧的切向量。于是，有向曲线弧 L 的切向量为

$$\tau=\varphi'(t)i+\psi'(t)j$$

它的方向余弦为

$$cos\ \alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}，\ cos\ \beta = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$$

参数方程的弧微分为

$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$$

由对弧长的曲线积分计算公式有

$$\int_L (P(x,y)+Q(x,y))\, ds$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P(\varphi(t),\psi(t))+Q(\varphi(t),\psi(t))\}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \quad (4)$$

若要使对弧长的曲线积分和对坐标的曲线积分相等，那么，用 (4) 式比较 (3) 式可得

$$\int_\alpha^\beta \left\{P(\varphi(t),\psi(t))\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}} + Q(\varphi(t),\psi(t))\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\right\}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

即 $\int_\alpha^\beta \{P(\varphi(t),\psi(t))\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}} + Q(\varphi(t),\psi(t))\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

$$= \int_\alpha^\beta \{P(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)\}\,dt$$

由于 $cos\ \alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$，$cos\ \beta = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$

所以 $\int_\alpha^\beta \left\{P(\varphi(t),\psi(t))\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}} + Q(\varphi(t),\psi(t))\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\right\}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

$$= \int_\alpha^\beta \{P(\varphi(t),\psi(t))\,cos\ \alpha + Q(\varphi(t),\psi(t))\,cos\ \beta\}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

$$= \int_L (P(x,y)cos\ \alpha + Q(x,y)cos\ \beta)\, ds$$

由于 $\int_\alpha^\beta \left\{P(\varphi(t),\psi(t))\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}} + Q\left((\varphi(t),\psi(t))\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\right.\right.\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\} dt$$

所以 $\int_L (P(x,y)cos\ \alpha + Q(x,y)cos\ \beta)\, ds =$

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

由此可见，平面曲线L上的两类曲线积分之间有如下联系

$$\int_L (P(x,y)cos\alpha + Q(x,y)cos\beta)\, ds =$$

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

其中$\alpha(x,y)$、$\beta(x,y)$为有向曲线弧L在点(x,y)处的切向量的方向角。

本文以已知了的参数方程的弧微分$ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$和两类曲线积分内在的本质推导出结论 $\int_L (P(x,y)cos\ \alpha + Q(x,y)cos\ \beta)\, ds = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$，符合逻辑且思路清晰，由已知的事实推导发现、预测新的事实是科学的重要作用。

数学这一学科不仅是数与形的简单结合，它在历史发展的长河中，成为了探求自然科学、社会科学深层次奥秘及人类理性思维的重要工具，数学这门学科，其发展历程涵盖了从简单到复杂，以及从具体到抽象的转变，数学这门学科的初期发展，源自于人们在对日常事物进行计数，以及对土地进行丈量等实际劳动过程中的需求和探索，随着时间流逝，数学脱离了具体的现实问题，发展成为一个独特且有重要作用的知识领域，构筑了自成一体的学科架构。高等数学作为数学领域的一个重要分支，其发展源起可追溯至17世纪时期兴起的微积分学，自那时起，高等数学因深邃的思想、严谨的逻辑以及广泛的应用而广受推崇，在高等教育学府中，对于理工科专业的学生而言，高等数学是必不可少的学习内容，同时也是理工科专业学生构建专业知识体系的基石，学生通过高等数学课程的学习能为他们未来深入学习相关专业课程提供坚实的支撑。

同济大学数学科学院所编的《高等数学》教科书，在国内众多高等教育学府中被广泛采用，该书编写认真、严谨、结构层次分明，因而获得师生广泛的认可，这本教科书包含了对高等数学基础概念及定理的详尽阐释，并通过丰富的示例与练习题目，助力学生深化对相关知识要素的认知与运用，《高等数学》第八版下册中，虽然部分推导过程基于某些前提假设，这些未必全部显性阐述，但这恰恰凸显了数学研究的基本特征，研究者常常依赖这些假设或未经证明的结论推进理论推理，而理论的完备性与证明则常常是后续探索的任务。

结语

高等数学是数学学科的一个关键部分，它的进化过程充满了对未知领域的探究和对常规理论的革新，高等数学的学习有助于深入洞察数学的实质与理念，锻炼严谨的逻辑推理能力，以及解决问题的技巧，从而为将来的学术探索和研究奠定坚实的基石。数学之美不仅在于其严谨的逻辑和精妙的计算，更在于其能够跨越学科的界限，为解决各种复杂问题提供独特的视角和方法。通过高等数学的学习，我们能够更好地理解自然，认识社会，为实现人类社会的进步与发展贡献智慧与力量。

参考文献

[1] 华东师范大学哲学系逻辑学教研室，形式逻辑 [M]5 版，上海：华东师范大学出版社，2016.

[2] 李文林，数学史概论 [M]3 版，北京：高等教育出版社，2011.

[3] 同济大学数学科学院，高等数学 [M]8 版，北京：高等教育出版社，2023.

作者简介：周智华，1983 年 3 月，男，贵州省瓮安县人，怀化学院数学与计算科学学院，讲师，研究方向：数学方面 (1) 实变函数论，(2) 泛函分析，物理方面 （1）狭义相对论。