融入基本数学思想提升大学物理教学质量

——以小角度近似在大学物理中的应用为例

潘丽华

扬州大学物理与科学技术学院

摘　要：数学思想是解决物理问题的关键。本文以小角度近似为例，探讨数学思想对大学物理学习的重要性。首先介绍其数学基础，然后通过质点运动学、简谐运动和光学等案例，分析该方法在在不同物理情境下的灵活运用。强化这一思想不仅有助于知识整合，更能有效培养学生的科学思维能力、建立模型化和近似化的分析能力和解决物理问题的能力，对大学物理教学起到促进作用。

关键词：大学物理教学；数学思想方法；小角度近似

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2025.09.098

引言

大学物理作为理、工、农、医等专业的重要基础课程，在新时代卓越人才培养体系中具有不可替代的作用。该课程不仅承担着传授经典物理知识和现代物理概念的任务，更肩负着培养学生科学素养、创新思维和解决问题能力的重要使命。

数学作为物理学的语言和工具，其思想方法贯穿于大学物理的各个知识模块。以“函数思想”为例，它揭示了物理量随时空变化的本质规律。同样，“极限思想”、“微元”和“微积分”思想[1-2]、“对称性与守恒律”[3-4]数学思想方法，都是理解和解决物理问题的关键所在。

本文将重点探讨“小角度近似”这一数学思想在大学物理中的广泛应用。作为一种重要的近似方法，小角度近似不仅体现了物理学“化繁为简”的研究智慧，更展示了数学工具在物理问题求解中的强大功能。本文通过分析平面曲线运动、单摆和复摆、光学干涉和衍射等多个典型案例，清晰地展现这一数学思想在不同物理情境下的灵活运用。掌握这类普适性的数学思想方法，不仅能帮助学生深刻理解物理概念，更能培养其运用数学工具解决实际问题的能力。

一、数学基础

下面从级数展开和几何图像两个角度阐述小角度近似的数学基础。

（一）级数展开

从高等数学中三角函数的级数展开可知，

$$sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\ldots,$$

$$tan\theta=\theta+\frac{\theta^3}{3}+\frac{2\theta^5}{15}+\frac{17\theta^7}{315}+\ldots$$ 。

所谓小角度近似，是指在角度 θ 较小（一般指 θ<5°）时，将小角度的正弦值和正切值近似为其弧度值来简化计算，而其余弦值则近似为 1，即：

$$sin\theta\approx tan\theta\approx\theta, cos\theta\approx 1$$ 。

利用泰勒展开对三角函数进行线性化处理，可使复杂问题大幅简化，同时保持较高的计算精度。

（二）几何图像

如图 1，在一个半径 R=1 的单位圆中，取角度 θ，并作其正弦线和正切线，则当角度 θ 足够小（趋向于零）时，正弦线 AB、弧线 BC 和正切线 CD 三者的长度近似相等。

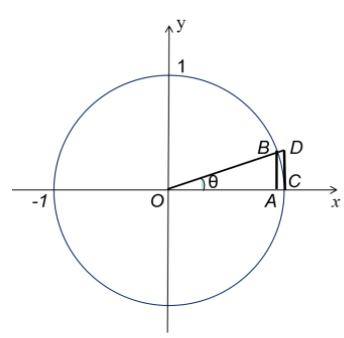

图 1 单位圆中角度 θ 及正弦线 AB 与正切线 CD

二、运用“小角度近似”思想解决物理问题的案例

“小角度近似”思想不仅体现了物理学“抓住主要矛盾，合理简化问题”的科学思维，还能帮助学生建立模型化、近似化的分析能力。

（一）平面曲线运动的切向加速度和法向加速度

质点在曲线运动过程中任一时刻的速度矢量总是沿着曲线的切线方向（图 2(a)）。为分析速度的变化情况，将质点在初始时刻的速度矢量和末时刻速度矢量平移到

同一起点 A 处（图 2(b)），则速度增量为$\Delta\vec{v} = \overline{BC}$。

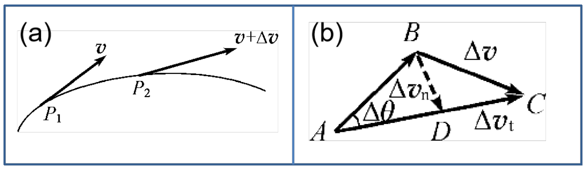

图 2(a) 曲线运动中轨迹和速度；(b) 速度增量分解图

在时间变化量Δt足够小时，分析瞬时加速度。在线段AC上截取$AD = AB$，则$|\overline{DC}|$为速度大小的变化。在小角度极限下，线段BD近似垂直于线段AB、也垂直于AC，所以$\overline{DC}$表示切向速度变化Δv_t；$\overline{BD}$表示法向速度变化Δv_n，且$|\overline{BD}| \cong |\overline{AB}|\cdot\Delta\theta = v\cdot\Delta\theta$。

由加速度定义，切向和法向加速度分别推导如下：

$$\overrightarrow{a_t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{DC}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v}{\Delta t}\overrightarrow{e_t} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{e_t}\ ,$$

$$\overrightarrow{a_n} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{BD}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v\cdot\Delta\theta}{\Delta t}\overrightarrow{e_n} = v\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_n} =$$

$$v\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}\overrightarrow{e_n} = \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{e_n}\text{。}$$

可见在曲线运动中，切向加速度直接反映质点运动速率的变化快慢；而法向加速度则刻画了速度方向变化的剧烈程度，方向恒指向曲率中心。

为帮助学生理解这两个概念，教学中可以请学生想象其正在驾驶一辆汽车，人对车的控制主要来自两个操作：踩油门／刹车和转方向盘。踩油门控制着切向加速度，决定车速的快慢；而转方向盘则对应法向加速度，主宰着行驶方向的改变。二者一个主管“速率”，一个主管“方向”，共同诠释了物体曲线运动的本质。

这个知识点的重要性不仅体现在“质点运动学”章节，也应用于“刚体定轴转动”中的转动状态分析。切向加速度和法向加速度的概念，完美地将质点运动的线性描述与刚体转动的角量描述融合在一起。刚体定轴转动章节经常出现的一个问题就是“求解刚体上某点的切向加速度和法向加速度”。

（二）单摆和复摆的小角度摆动

单摆和复摆是研究简谐振动规律的典型物理模型，在理论研究和实验教学中都具有重要价值。如图 3(a) 所示，单摆系统由质量集中于一点的摆锤和轻质不可伸长的细绳构成。复摆作为单摆的拓展模型（图 3(b)），是由任意形状刚体绕固定水平轴作小角度摆动的系统。

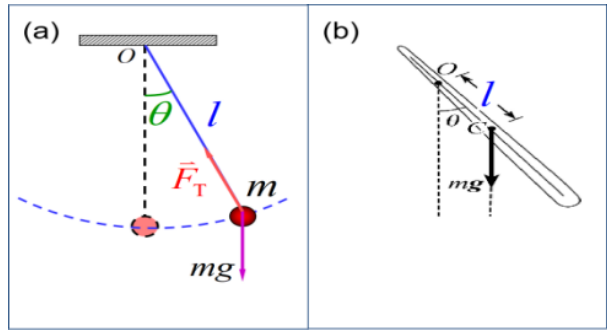

图 3 单摆和复摆的小角度摆动

分析单摆的动力学成因，当摆线偏离竖直方向一定角度时，摆球受到重力和绳子拉力的合力，回复力为$F = -mgsin\theta$；根据牛顿第二定律得到非线性方程$-mgsin\theta = ml\ddot{\theta}$，无法精确求解。但在摆角较小时，我们可以大胆地“截断”仅保留一阶项 sin θ ≈ θ，瞬间将方程从非线性变成了线性，从而将问题纳入了简谐运动这一成熟完善且求解简单的理论框架之中。

对单摆而言，可得出周期公式$T = 2\pi\sqrt{l/g}$，其周期只与摆长和重力加速度有关。单摆周期与振幅无关这一性质，正是在小角度近似下的直接结论。伽利略之所以能在比萨大教堂观察到吊灯的等时性，正是因为他观察的是一个“小角度”摆动。当摆角增大到 30 度时，上述的单摆周期公式就会出现明显误差；当角度接近 90 度，运动将彻底告别简谐特性。

对复摆而言，复摆受到作用在质心位置的重力作用和过支点的支持力，但只有重力矩作用，重力矩可表示为：$M = -mgl\sin\theta$；再根据刚体转动定律，可得$-mglsin\theta = I\ddot{\theta}$，其中$I$为刚体相对转轴的转动惯量。基于小角度近似$\sin\theta \approx \theta$，从而整理得出其简谐运动方程。

单（复）摆的回复力及其力矩本来是非线性函数，通过小角度近似，将复杂的非线性问题转化为可解的线性问题。我们可以依此类推得出，浮在水面的木块、甚至微观分子振动都表现出简谐运动的规律。

此外，这种“在平衡点附近线性化”的思想，早已渗透到物理学的各个分支。例如，LC 振荡电路在小信号下是线性系统，其振荡方程与弹簧振子方程形式完全一致；量子力学中谐振子模型，其哈密顿量正是源于经典力学简谐运动的能量表达式。因此，掌握“线性化”思想，就如同获得了一把钥匙，我们就同时掌握了理解一大批物理现象的工具。

（三）杨氏双缝干涉中的波程差

在 2002 年《物理世界》杂志评选的“十大最美物理实验”中，杨氏双缝实验光荣上榜。该实验的精妙之处，不仅在于它用最简洁的装置揭示了光的波动本性，更在于其理论推导中所蕴含的深刻物理思想。如图 4(a)，设相干光源通过两个理想的狭缝（间距d），双缝到屏幕的距离为L，且满足“远场近似”条件d。在屏幕上任取一点 P，其到达屏幕中心的距离为x，双缝到 P 点的距离分别为r_1和r_2。在波程差分析中，分三步灵活使用小角度近似。

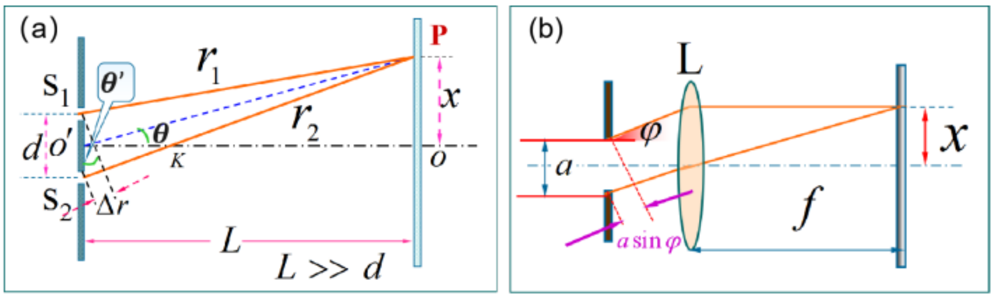

图 4(a) 双缝干涉实验，(b) 单缝衍射实验

考虑到在远场条件下，我们把画弧截差的操作近似为从狭缝 1 作 2 光线的垂线，狭缝 2 到垂足的距离即为所求波程差；第二步取 $\theta' \approx \theta$：图中和 θ’ 严格相等的角应该是 2 光线和中心轴线相交的对顶角，而对顶角∠PKO和图中θ相差了一个很小的角度$\angle O'PS_2$；第三步则是根据旁轴近似条件（$x \ll L$），利用小角度近似 $\sin\theta \approx \tan\theta$。所以，综合得到以下分析结果：

$$\Delta r = r_2 - r_1 \approx d\sin\theta' \approx d\sin\theta \approx d\tan\theta = d\frac{x}{L}$$

这套近似不是“不精确”的代名词，恰恰相反，它用一个清晰、可验证的数学模型完美预言了实验中那清晰明暗相间的条纹，为光的波动说提供了无可辩驳的证据。但需要注意的是，当不满足近似条件时（例如在近场观察、使用宽光源或大角度观测），实验现象将偏离这个简单公式，更复杂的衍射效应会凸显出来，此时需要夫琅禾费衍射理论来补充和修正。

（四）求单缝衍射中的光程差

单缝衍射中光程差的推导中同样用到了小角度近似。如图 4(b) 所示，根据凸透镜成像原理可知，衍射角为 φ 的平行光会被会聚到屏幕一点，且该会聚点的位置满足 $\tan\varphi = x/f$。假设衍射角较小，单缝边缘的两条光线的光程差可取如下近似：

$$\Delta = a\sin\varphi \approx a\tan\varphi = a\frac{x}{f}$$

近似结果使得计算条纹位置、间距等变得较为简单，让我们能快速抓住影响衍射现象的主要物理参数。

结语

本文通过系统梳理小角度近似思想在力学、电磁学和光学等不同领域的应用，揭示其在整合大学物理课程内容、构建统一知识框架方面的重要价值。研究选取了四个典型教学案例：从力学中的切向加速度与法向加速度分析、到单摆和复摆的简谐运动研究，再到光学中的杨氏双缝干涉计算和单缝衍射分析。这些案例生动展示了如何运用统一的数学思想解决不同物理背景下的复杂问题。

教学实践表明，通过“小角度近似”这一纽带，可以有效打破传统物理教学中各章节的知识壁垒，更能培养其“以简驭繁”的物理直觉，从而有效培养学生的科学思维能力、问题解决能力和提升学生的学习自信心。小角度近似是物理学中“有效理论”的完美范例，教学中同时明确任何物理模型都有其适用边界，并准备好当跨越边界时，用更复杂的工具去迎接新的挑战，这对于培养新时代具有创新能力的卓越人才具有重要意义。

参考文献

[1] 赵朝军，张昱．浅谈大学物理教学中微分和积分思想的应用 [J]，科技风，2023(28)，22-24.

[2] 宋书宇．微积分在物理学中的应用 [J]，数理化解题研究，2023(36)，110-112.

[3] 陆静，刘仁臣．基于对称性思维的大学物理教学改革探索 [J]，科技创新导报，2019(2)，215-218.

[4] 孙宗扬．物理学中的对称性 [M]，中国科学技术大学出版社，2009.

[5] 赵近芳，王登龙．大学物理简明教程（第 5 版）[M]，北京邮电大学出版社，2020.

基金项目：扬州大学 2021 年混合课程项目（YZUHH 2021-7）。