关于考研数学中利用二重积分求旋转体体积的探究

荆会超　郝鑫灵
郑州西亚斯学院 计算机与软件工程学院

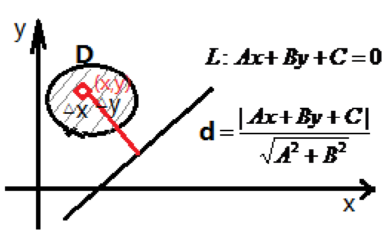
摘　要：求旋转体体积是考研数学中的一个重要知识点，也是高等数学中的核心应用题型之一。在高等数学的教材中，只介绍了定积分的微元法和公式法求旋转体的体积，这类方法学习起来较为困难，且根据平面图形是 X 型或 Y 型绕坐标轴旋转，类型繁多．本文将探究如何利用二重积分求旋转体的体积，这种方法不局限于特定的旋转轴，不仅公式统一，且计算方便、更易于学习。

关键词：二重积分；旋转体；体积
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2025.10.086

引言

在考研数学中，求旋转体的体积是一个非常重要的热门考点，但许多高等数学教材 [1] 和考研资料只介绍了定积分微元法求旋转体体积的基本方法和如何利用旋转体的定积分计算公式求旋转体体积，而定积分的微元法是学生学习的难点，且不易掌握，又旋转体的定积分公式根据平面图形是 X 型或 Y 型绕坐标轴旋转，类型繁多，学习的时候也是很困难的，这样就有必要探究如何利用二重积分计算旋转体的体积，并且这种方法不需要掌握很多公式，就能求平面图形绕任何直线旋转所得旋转体的体积。

定理：设平面图形D是由封闭曲线所围成，L是D外的一条直线，则平面图形D绕直线L旋转一周所得旋转体的体积$V=\iint\limits_D 2\pi d(x,y)dxdy$，其中$d(x,y)$是$D$内任一点$(x,y)$到直线$L:Ax+By+C=0$的距离。



证明：用平行于坐标轴的直线任意分割闭区域D为n个小的闭区域$\Delta\sigma_i$块（$i=1,2,\cdots,n$），则第i个小闭区域块的面积$\Delta\sigma_i=\Delta x_i\Delta y_i$，在$\Delta\sigma_i$上任取一点$(\xi_i,\eta_i)$，小闭区域块$\Delta\sigma_i$绕直线$L$旋转一周可得一个以$d$为半径的小圆环筒（其中$d$是点$(\xi_i,\eta_i)$到直线$L$的距离$d(\xi_i,\eta_i)$），且该小圆环筒的体积$V_i=2\pi d\cdot\Delta x_i\Delta y_i$，于是平面图形$D$绕直线$L$旋转所得旋转体的体积

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}V_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2\pi d\cdot\Delta x_i\Delta y_i$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2\pi d(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i\Delta y_i=\iint\limits_D 2\pi d(x,y)dxdy\,.$$

一、平面图形D绕坐标轴旋转

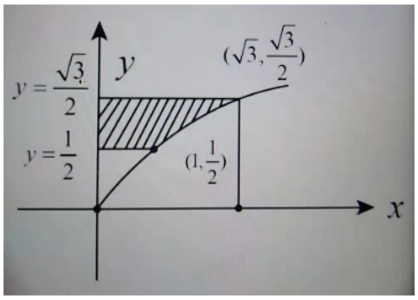
（一）闭区域D绕x轴旋转

由于旋转轴为x轴，则D内任一点(x,y)到x轴的距离为$d(x,y)=|y|$，此时闭区域D绕x轴旋转一周所得旋转体的体积$V_x=2\pi\iint\limits_D|y|dxdy$．

例 1（2020②）[2]：已知$2f(x)+x^2f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$，求$f(x)$，并求直线$y=\frac{1}{2}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$与函数$f(x)$所围图形绕$x$轴旋转一周而成的旋转体的体积。

解：令$x=\dfrac{1}{u}$，原等式化为

$$2f(\frac{1}{u})+\frac{1}{u^2}f(u)=\frac{\frac{1}{u^2}+\frac{2}{u}}{\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}}=\frac{1+2u}{u\sqrt{1+u^2}},$$



即$2f(\frac{1}{x})+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{1+2x}{x\sqrt{1+x^2}}$，该等式与已知等式联立解得$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，于是可得$x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$，所以闭区域$D=\{(x,y)\mid\frac{1}{2}\le y\le\frac{\sqrt{3}}{2},0\le x\le\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\}$，故所求旋转体的体积

$$V_x=2\pi\iint_D|y|dxdy=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}ydy\int_0^{\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}}dx=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}dy=\frac{\pi^2}{6}.$$

（二）闭区域D绕y轴旋转

由于旋转轴为y轴，则D内任一点(x,y)到y轴的距离为$d(x,y)=|x|$，此时闭区域D绕y轴旋转一周所得旋转体的体积$V_y=2\pi\iint_D|x|dxdy$.

例 2:（2020③）：设平面区域

$D=\left\{(x,y)\mid\frac{x}{2}\le y\le\frac{1}{1+x^2},0\le x\le 1\right\}$，求平面区域$D$绕$y$轴旋转所成旋转体的体积。

$$V_y=2\pi\iint_D|x|dxdy=2\pi\int_0^1 xdx\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{1}{1+x^2}}dy=$$

$$2\pi\int_0^1 x(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{2})dx$$

$$=2\pi\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx-2\pi\int_0^1\frac{x^2}{2}dx$$

$$=\pi\ln(1+x^2)\Big|_0^1-\frac{\pi}{3}x^3\Big|_0^1=\pi(\ln 2-\frac{1}{3}).$$

二、平面图形D绕垂直于坐标轴的直线旋转

（一）闭区域D绕垂直于x轴的直线$x=a$旋转

由于旋转轴为直线$x=a$（常数$a\ne 0$），则D内任一点(x,y)到直线$x=a$的距离为$d(x,y)=|a-x|$，此时闭区域D绕直线$x=a$旋转一周所得旋转体的体积$V_{x=a}=2\pi\iint_D|a-x|dxdy$.

例 3（1993）[3]：设平面区域D是由$x^2+y^2\le 2x$与$y\ge x$所围成，求图形D绕直线$x=2$旋转一周所得旋转体的体积。

解由于D内任一点(x,y)到直线$x=2$的距离$d(x,y)=2-x$，其中区域$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,x\le y\le\sqrt{2x-x^2}\}$，于是所求旋转体的体积$V_{x=2}=2\pi\iint_D(2-x)dxdy$

$$=2\pi\int_0^1(2-x)dx\int_x^{\sqrt{2x-x^2}}dy=2\pi\int_0^1(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx$$

$$=2\pi\left[\int_0^1(1-x)\sqrt{2x-x^2}dx+\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx-\int_0^1(2-x)xdx\right]=2\pi\left[\frac{1}{3}(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right]=\frac{\pi^2}{2}-\frac{2\pi}{3}.$$

（二）闭区域D绕垂直于y轴的直线$y=b$旋转

由于旋转轴为直线$y=b$（常数$b\ne 0$），则D内任一点(x,y)到直线$y=b$的距离为$d(x,y)=|b-y|$，此时闭区域D绕直线$y=b$旋转一周所得旋转体的体积$V_{y=b}=2\pi\iint_D|b-y|dxdy$.

例 4：过点$(1,0)$作曲线$y=x^2$的切线，该切线与曲线$y=x^2$及x轴围成平面图形D，求D绕直线$y=4$旋转一周所得旋转体的体积。

解：设曲线$y=x^2$上的切点坐标为(x_0,x_0^2)，则过该点的切线斜率为$k=y'|_{x=x_0}=2x_0$，故切线方程为$y-x_0^2=2x_0(x-1)$，又切线过点$(1,0)$，代入解得$x_0=2$，所以切线方程为$y=4(x-1)$，于是D内任一点(x,y)到直线$y=4$的距离$d(x,y)=4-y$，且$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 4,\sqrt{y}\le x\le\frac{y}{4}+1\}$，故所求旋转体的体积。

$$V_{y=4}=2\pi\iint_D d(x,y)dxdy=2\pi\iint_D(4-y)dxdy=$$

$$2\pi\int_0^4(4-y)dy\int_{\sqrt{y}}^{\frac{y}{4}+1}dx=\frac{64}{15}\pi$$

三、平面图形D绕直线$L:Ax+By+C=0$旋转

由于旋转轴为直线$L:Ax+By+C=0$，则D内任一点(x,y)到直线$L:Ax+By+C=0$的距离为$d(x,y)=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，此时闭区域$D$绕直线$L:Ax+By+C=0$旋转一周所得旋转体的体积

$V_L=2\pi\iint_D\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}dxdy$（其中$A^2+B^2\neq 0$）.

例5：设平面图形D是由$y=x^2$，$x=y^2$所围成，求D绕直线$L:y=x-1$旋转所得旋转体的体积。

解：由于D内任一点(x,y)到直线$y=x-1$的距离为$d=\frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|x-y-1|$，于是所求旋转体的体积

$V=2\pi\iint_D d(x,y)dxdy=\sqrt{2}\pi\iint_D|x-y-1|\,dxdy$，由于在$D$内任一点$(x,y)$满足$y>x-1$，即$x-y-1<0$，而区域$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ x^2\le x\le\sqrt{x}\}$，所以$V_L=\sqrt{2}\pi\iint_D(y-x+1)dxdy$

$$=\sqrt{2}\pi\int_0^1dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(y-x+1)dy$$

$$=\sqrt{2}\pi\int_0^1\left(\frac{y^2}{2}-xy+y\right)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx$$

$$=\sqrt{2}\pi\int_0^1\left[\frac{1}{2}(x-x^4)-x\sqrt{x}+x^3+\sqrt{x}-x^2\right]dx=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}.$$

例6：设区域$D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2\le 2\}$，求$D$绕直线$y=-x$旋转一周所得旋转体的体积。

解：因为D内任一点(x,y)到直线$L:x+y=0$的距离$d(x,y)=\frac{|x+y|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$，且闭区域$D=\{(r,\theta)\,|\,-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4},\ 0\le r\le 2(\cos\theta+\sin\theta)\}$，

故所求旋转体的体积$V_L=2\pi\iint_D d(x,y)dxdy$

$$=\sqrt{2}\pi\iint_D(x+y)dxdy=\sqrt{2}\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)}$$

$$(\cos\theta+\sin\theta)\cdot r^2dr=\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)^4d\theta$$

$$=\frac{32\sqrt{2}\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^4(\theta+\frac{\pi}{4})d\theta\ \underline{\underline{\alpha=\theta+\frac{\pi}{4}}}\ \frac{32\sqrt{2}\pi}{3}$$

$$\int_0^{\pi}\sin^4\alpha d\alpha=\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\alpha d\alpha$$

$$=\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=4\sqrt{2}\pi^2.$$

结语

利用定积分求旋转体的体积，公式的种类较多，学生不易辨别平面图形的类型，这样对学生的学习就造成很大的困难，特别是平面图形绕斜直线旋转时，由定积分求旋转体的体积就更难，但用二重积分求绕斜直线旋转的旋转体体积就非常方便，且方法比较简洁，容易被学生掌握,并且二重积分有时还可以转化为极坐标计算，可简化计算过程，所以用二重积分求旋转体的体积具有一定的学习价值。

参考文献

[1] 同济大学数学系．高等数学（上册）[M]．第八版．北京：高等教育出版社，2023:273-275.

[2] 武忠祥．高等数学辅导讲义 [M]．中国农业出版社，2023:130-131.

[3] 张天德，孙钦福．高等数学精选精解（上册）[M]．高等教育出版社，2022:320-322.

作者简介：荆会超（1987.3—），男，汉族，河南新郑人，硕士，郑州西亚斯学院 计算机与软件工程学院，助教，研究方向：数值最优化、图像处理；郝鑫灵（1996.9—），女，汉族，河南新郑人，硕士，郑州西亚斯学院 计算机与软件工程学院，助教，研究方向：基础数学。