

# 高中数学数列通项公式求解方法的系统研究与教学应用

高云秀

云南省大理州剑川县民族中学

**摘要：**本文旨在全面而系统地阐述高中数学中数列通项公式的多种核心求解方法。文章以数学课程标准为依据，紧密结合高考命题趋势，通过一系列精心挑选的典型例题，对公式法、前 $n$ 项和与通项关系法、累加法、累乘法、构造法（包括配常数、取倒数、除（乘）幂等技巧）等关键方法的理论基础、适用场景、解题范式及思维要点进行了深入的剖析与解读。本文不仅致力于为学生提供一套行之有效的数列通项公式求解策略，更注重培养其观察、联想、转化、建模等高阶数学思维能力，以期显著提升学生的数学解题水平与综合素养。此探究成果亦可为广大高中数学教师在“数列”章节的教学设计与实践中提供有价值的参考与借鉴。

**关键词：**数列通项公式；求解方法；高中数学

**【DOI】** 10.12252/j.issn.2096-6288.2025.11.154

## 引言

在高中数学的宏大知识体系中，数列（Sequence）占据着一个至关重要的位置。它不仅是初中代数知识在深度与广度上的自然延伸与重要拓展，更扮演着一个独特的“连接者”角色，如同一座坚实的桥梁，巧妙地将函数、方程、不等式、三角函数、解析几何等多个核心知识模块紧密地联系在一起，形成了知识网络的关键枢纽。纵观历年来的高考数学试卷，数列问题始终是考察的重点与热点，其命题形式灵活多变，常常以压轴题或综合性大题的形式出现，这不仅要求学生具备扎实的计算基本功，更对其逻辑推理能力、抽象概括能力、数据处理能力以及数学建模等核心素养提出了全面而深刻的挑战。

数列的灵魂在于其通项公式  $a_n$ 。通项公式是揭示数列内在规律性的数学表达式，它精准地定义了数列中任意一项与项数  $n$  之间的函数关系。因此，掌握通项公式的求解方法，就如同获得了一把能够开启所有数列问题大门的“万能钥匙”。无论是计算数列的前  $n$  项和，还是探究数列的单调性、有界性等性质，抑或是解决与数列相关的实际应用问题，第一步往往都是求出其通项公式。可以说，通项公式的求解能力是衡量学生数列知识掌握程度的核心标准。

然而，在实际的教学与学习过程中，一个普遍存在的现象是，许多学生在面对形式各异的数列通项公式求解问题时，往往表现出方法单一、思维僵化、应变能力不足的困境。他们可能熟练掌握了等差、等比数列的基本公式，但一旦题目条件稍作变化，例如以递推关系给出，或者与其他知识点结合，便会感到束手无策，解题思路陷入僵局。这种状况的根源在于未能形成一个系统化、结构化的数列求解方法论体系，缺乏对各种方法背后数学思想的深刻理解。

因此，本文的撰写旨在解决这一痛点。我们将系统地梳理、归纳并深入探究求解数列通项公式的多种常见且高效的方法。通过“理论讲解+典型例题+思路剖析+归纳总结”的模式，力求将每一种方法的适用条件、操作步骤和内在逻辑讲深讲透，帮助学生构建起一个清晰、完备的解题策略库。最终目的在于，不仅让学生“会做题”，更能让他们“会想”题，从而全面提升其数列学习的成效，增强其驾驭复杂数学问题的信心与能力，为其未来的数学学习乃至终身发展奠定坚实的数学思维基础。

## 一、公式法

公式法是求解数列通项公式最基础、最直接的方法，主要针对等差数列和等比数列这两种常见数列类型。通过题目给出的条件，例如首项、公差或公比，学生可以直接套用等差数列的“首项加公差乘以项数减一”或等比数列的“首项乘以公比的项数减一次方”的标准公式，快速求出通项表达式。这种方法简单明了，计算步骤清晰，非常适合初学者快速上手，尤其在题目明确提示数列为等差或等比类型时，效率极高。例题通过已知两项求解等差数列的通项，展示了如何利用两项之间的关系确定公差和首项，再通过公式推导出通项公式。在教学中，公式法是学生理解数列规律的入门方法，有助于建立对数列基本结构的直观认识，为后续学习更复杂的方法奠定基础。

已知或根据题目的条件能够推出数列  $\{a_n\}$  为等差或等比数列，根据通项公式  $a_n = a_1 + (n-1)d$  或  $a_n = a_1 q^{n-1}$  进行求解。

例：已知  $\{a_n\}$  是一个等差数列，且  $a_2 = 4$ ， $a_6 = 8$ ，求  $\{a_n\}$  的通项公式。

[解析] 设数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ，则  $a_1 + d = 4$ ， $a_1 + 5d = 8$ ，解得  $a_1 = 3$ ， $d = 1$ ，所以  $a_n = a_1 + (n-1)d = n + 2$

## 二、前 $n$ 项和法

前  $n$  项和法是一种利用数列前  $n$  项和的表达式来反推通项公式的方法，特别适用于题目直接提供前  $n$  项和的解析式或递推关系的情况。其核心思想是通过前  $n$  项和与前  $n-1$  项和的差值，直接得到第  $n$  项的表达式，从而推导出通项公式。这种方法巧妙地利用了数列定义中“和”与“项”之间的内在联系，体现了数学中从整体到局部的逆向思维。例题展示了如何通过和式的递推关系，结合初始条件，逐步推导出通项公式，尤其适合处理和式与单项关系明确的数列问题。在教学中，前  $n$  项和法不仅帮助学生理解数列的累积性质，还能培养他们从全局视角分析问题的能力。通过反复练习，学生可以熟练掌握从和式到单项的转化技巧，提升解题的灵活性。

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  的解析式，求  $\{a_n\}$  的通项  $a_n$  可用公式  $a_n = \begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$  求解。

例：已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = 2^n - 1$ ，求通项  $a_n$ 。

[解析] 当  $n \geq 2$  时， $a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - 3) - (2^{n-1} - 3) = 2^{n-1}$

而  $a_1 = S_1 = -1$  不适合上式， $a_n = \begin{cases} -1, n=1 \\ 2^{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ 。

## 三、累加法

累加法是一种通过逐项累加递推关系式来求解通项公式的高效方法，特别适用于递推关系可以通过相加消去中间项的情况。其核心思想是将递推式从首项开始逐项相加，利用“叠消”原理将复杂的递推关系转化为一个关于通项的直接表达式。这种方法在处理线性递推关系时尤为有效，能够将看似复杂的递推问题简化为等差或等比数列的形式。例题通过累加递推式，展示了如何通过相加消去中间项，得到一个简单的等式，进而求出通项公式。在教学中，累加法可以帮助学生理解递推关系的累积效应，培养他们观察规律、化繁为简的数学思维。这种方法还启发学生关注数列的结构特征，学会从多步关系中提炼出关键信息。

已知  $a_1$ ，且  $a_n - a_{n-1} = f(n) (n \geq 2)$ ，可用累加法求  $a_n$ ，即  $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$ 。

例：设数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ，且  $a_{n+1} - a_n = n+1 (n \in \mathbb{N}^*)$ ，求  $a_n$ 。

[解析] 由题意  $a_2 - a_1 = 2, a_3 - a_2 = 2, \cdots, a_n - a_{n-1} = n (n \geq 2)$

以上各式相加，得  $a_n - a_1 = 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2} = \frac{n^2 + n - 2}{2}$ 。

又因为  $a_1 = 1$ ，所以  $a_n = \frac{n^2 + n}{2} (n \geq 2)$ 。

因为当  $n=1$  时也满足此式，所以  $a_n = \frac{n^2 + n}{2} (n \geq 1)$ 。

## 四、累乘法

累乘法与累加法类似，但针对的是递推关系可以通过逐项相乘来处理的情况。其核心思想是将递推式从首项开始逐项相乘，消去中间项，从而建立通项与首项之间的直接关系，得到通项公式。这种方法特别适用于递推关系呈现乘法形式或可以通过变形转化为乘法形式的数列。例题通过累乘递推式，展示了如何将复杂的乘法关系简化为等比数列的形式，进而快速求出通项公式。在教学中，累乘法不仅帮助学生掌握处理乘法递推关系的技巧，还能让他们体会到数学中“化归”的思想，即通过适当的运算将问题转化为熟悉的模型。这种方法的灵活性使其在解决非标准数列问题时具有独特优势，适合培养学生的逻辑推理和数学转化能力。

已知  $a_1$ ，且  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n) (n \geq 2)$ ，可用累乘法求  $a_n$ ，

即  $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1$

## 五、构造数列求通项的方法

构造法是求解数列通项公式中最灵活、最具技巧性的方法，其核心思想是通过数学变换构造一个新的辅助数列，使其满足等差或等比数列的性质，从而间接求出原数列的通项公式。这种方法适合处理非标准形式的递推关系，通过“转化与化归”的策略，将复杂问题简化为熟悉的数学模型。构造法包含多种具体技巧，如配常数、取倒数、除（乘）幂等，每种技巧都体现了数学中化繁为简、化陌生为熟悉的智慧。在教学中，构造法可以激发学生的创造性思维，鼓励他们尝试不同的转化路径，培养解决复杂问题的信心和能力。

1. 配常数：形如  $a_{n+1} = pa_n + q (p \neq 0, \text{且 } p \neq 1, q \neq 0, n \in \mathbb{N}^*)$

配常数法通过在递推关系中引入一个常数，调整公式形式，使其转化为等比数列的递推关系，从而便于求解。其核心在于通过待定系数法确定合适的常数，构造一个易于求解的辅助数列，再通过逆运算得到原数列的通项公式。例题通过点在直线上的几何条件，展示了如何配常数将复杂的递推关系转化为等比数列，进而求解通项。这种方法在教学中能帮助学生理解数学中的“构造”思想，

学会通过调整表达式结构来简化问题，同时也培养了他们结合几何与代数的综合思维能力。

方法：变形为  $a_{n+1} + t = p(a_n + t)$ （可用待定系数法求  $t$ ），可得以  $p$  为公比的等比数列  $\{a_n + t\}$  的通项公式，进而可求  $a_n$ 。

注意：求解时，注意新构造的数列的首项和最后要求的数列的通项分别是什么。

## 2. 取倒数

取倒数法适用于递推关系中出現倒数形式的数列，通过对递推式两边取倒数，构造一个新的等差或等比数列，再通过逆运算求出原数列的通项公式。其核心思想是将原数列的倒数转化为一个更容易处理的数列形式，从而简化求解过程。例题展示了如何通过取倒数将递推关系转化为等差数列，快速求解通项公式。在教学中，取倒数法可以帮助学生理解倒数变换的数学意义，培养他们从不同角度审视问题的能力，同时也为处理非线性递推关系提供了一种新颖的思路。

$$\text{形如 } a_{n+1} = \frac{pa_n}{qa_n + r} \quad (p, q, r \text{ 是常数})$$

$$\text{方法：变形为 } \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{r}{p} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{q}{p}$$

$$\text{①若 } p=r, \text{ 则 } \left\{ \frac{1}{a_n} \right\} \text{ 是等差数列, 且公差为 } \frac{q}{p}$$

可用公式求通项；

②若  $p \neq r$ ，则转化为  $a_{n+1} = sa_n + t$  型，再利用构造法求解。

## 3. 除（乘）幂

除（乘）幂法通过在递推关系两边同时除以或乘以某项的幂次，构造一个新的辅助数列，使其满足等差或等比数列的性质。其核心在于选择合适的幂次进行变换，简化递推关系，从而便于求解通项公式。例题通过两种不同变换方式，展示了如何将复杂递推关系转化为可累加或等比的形式，体现了方法的多样性和灵活性。在教学中，这种方法可以帮助学生理解指数变换的作用，培养他们通过尝试不同转化方式来解决问题的能力，同时也强化了他们对数列结构特征的观察力。

$$\text{形如 } a_{n+1} = pa_n + q^n \quad (p, q \text{ 为常数, } pq(p-1) \neq 0)$$

方法：①先在递推公式两边同时除以  $q^{n+1}$ ，

$$\text{得 } \frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} - \frac{p}{q} \cdot \frac{a_n}{q^n} = \frac{1}{q}, \text{ 然后引入辅助数列 } \{b_n\} \left( \text{其中 } b_n = \frac{a_n}{q^n} \right),$$

$$\text{得 } b_{n+1} = \frac{p}{q} \cdot b_n + \frac{1}{q}, \text{ 再用构造法求解；②在原递推公式}$$

两边同时除以  $p^{n+1}$ ，得  $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^n$ ，引入辅助数列  $\{b_n\}$ （其中  $b_n = \frac{a_n}{p^n}$ ），得  $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^n$ ，再利用累加法求解。

## 结语

数列通项公式的求解是高中数学数列部分的核心，也是整个高中数学能力培养的关键环节。通过本文的系统梳理与深入探究，我们可以看到，求解通项公式的方法是丰富多样、彼此关联且富有思想性的。从最基本的等差、等比公式法，到揭示项与和内在联系的前  $n$  项和法，再到处理特定递推关系的累加法与累乘法，直至展现数学转化与化归思想精髓的各类构造法，每一种方法都对应着一类特定的数列结构和一种独特的解题视角。

在实际的教学与学习过程中，我们必须超越对单一方法的机械记忆和模仿。学生需要深入理解每种方法背后的数学原理：公式法是基础模型的直接应用；前  $n$  项和法是定义的逆向运用；累加法和累乘法是“叠消”思想的体现；而构造法则是通过换元、变形等手段，将未知问题转化为已知模型的智慧。教师在教学时，应着重引导学生观察递推关系的结构特征，分析其与标准模型的异同，从而启发学生主动选择最优的解题路径。这种基于结构分析的“模式识别”能力，是形成数学解题直觉和提升解题效率的关键。

此外，我们应当强调，学习这些方法不仅仅是为了解出某一道题，更重要的是在解题过程中培养和锻炼数学核心素养。通过解决复杂的数列问题，学生能够学会如何将一个复杂问题分解，如何通过类比和联想寻找突破口，如何运用转化的思想将陌生问题熟悉化。这些思维品质的提升，其价值远远超出了数列知识本身，将对学生的整个数学学习乃至未来的学术和职业生涯产生深远的影响。

随着新课程改革的不断深化和高考命题的持续创新，未来的数列问题必将更加注重思想性、综合性和应用性。通项公式的求解可能会与函数、不等式、解析几何、概率统计等内容进行深度融合，甚至与现实生活中的增长模型、金融复利等实际场景相结合。这就对我们师生提出了更高的要求：我们必须与时俱进，不断探索和实践，不仅要掌握“术”（解题方法），更要领悟“道”（数学思想），将数列知识内化为一种分析问题和解决问题的强大能力，以从容应对未来数学学习与选拔性考试带来的各种挑战。

## 参考文献

[1] 人民教育出版社课程教材研究所. 普通高中教科书数学（选择性必修第二册）[M]. 北京：人民教育出版社，2020：2-15.

[2] 李庚南. 高中数学解题方法与技巧——数列通项公式的求解策略 [J]. 中学数学教学参考，2019（12）：34-37.