基于大学数学竞赛及考研真题浅谈极限的计算

王云杰
江苏师范大学 科文学院

摘　要：本文通过解析大学数学竞赛及考研数学中的极限计算真题，系统总结极限运算的解题技巧，助力学生深化对极限思想的理解，提升发现问题、分析问题与解决问题的能力，激发学生学习高等数学的兴趣。

关键词：数学竞赛； 函数极限； 无穷小等价替换；洛必达法则
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2025.11.098

引言

高等数学作为一门重要的公共基础课程，在经济管理、自然科学、生命科学及工程技术等众多领域应用广泛。学好高等数学是培养技能型专业人才的必备条件，但其知识点繁多、章节联系紧密，要求学习者建立严密的思维方式与习惯，方能更好地掌握和应用相关知识[1]。

极限思想作为高等数学的灵魂与精髓，构建起整个学科体系的逻辑根基．从函数连续性的定义来看，当自变量的变化趋于无穷小时，函数值的变化也趋近于零，这种 “无限逼近” 的过程正是极限概念的具象化体现；导数的本质则是通过极限运算，刻画函数在某一点处的瞬时变化率，将平均变化率推向极致，让 “速度” 的测量从宏观走向微观；微分则借助极限的桥梁，将非线性函数局部线性化，实现以直代曲的精妙转化；而积分更是极限思想的集大成者，通过无限分割、近似代替、求和取极限的过程，将不规则图形的面积、不规则物体的体积等复杂问题逐一攻克。

极限思想不仅贯穿于理论推导，更在实际应用中展现出强大的生命力．在物理学领域，通过极限思维求解瞬时速度与加速度，为经典力学的发展奠定数学基础；在工程计算中，利用定积分的极限原理，能够精准计算材料受力变形后的微小位移，助力复杂结构设计；在经济学中，边际分析依赖极限概念研究变量的微小变动对总量的影响，为资源优化配置提供科学依据．这些无一不说明极限的重要性，学好极限并能熟练运用是掌握高等数学的必备知识和技巧，因此极限在高等数学中具有极其重要的地位,本文旨在总结极限的解题技巧与方法,为学生提供引导。

另外，每年都有不少学生虽然没有选择数学专业，但却对数学很感兴趣，想要进一步的学习数学知识，希望参加数学竞赛．也有部分学生打算考研以继续深造．想要实现这些目标，他们必须掌握高等数学的重要知识，熟练掌握其中的解题技巧。

考虑到极限思想是高等数学的基本思想，是高等数学的灵魂．因此，本文主要考虑将一题多解的极限的运算技巧应用到数学竞赛及考研数学中的极限计算真题上。

一、案例及方法透析

对于函数极限的计算，实际上重要的极限计算方法有：四则运算、等价无穷小替换、两面夹、单调有界、洛必达法则、泰勒公式及定积分等．对于简单一些的题目，若能单独使用一个方法就可以解决，大部分学生都能掌握．然而对于相对复杂一些的计算，特别是需要结合几种方法的题目，就存在很多学生难以实际运用．比如数学竞赛或考研数学中的极限计算，多数是有一定难度的，导致一部分学生产生一定的畏惧心理．为了克服这种心理，提高学生对极限思想的理解及计算技巧的运用，我们以数学竞赛及考研数学中的极限真题为例，分析极限计算方法的综合运用，来帮助学生更快掌握高等数学的解题技巧。

下面我们首先分析每个极限计算方法的使用技巧。首先是四则运算，虽然这个运算是最简单、最基础的运算，但在使用时，需要注意其限制条件，特别是对新生来说，容易忽略，常常导致计算错误。理解这些限制条件，是避免基础错误、解决复杂极限问题的前提。其一、参与运算的各函数极限均存在且为有限值。这些就要我们在学习的过程中注意哪些极限是存在的，基本的结论要记住，还有一些可以根据初等函数图像判断其极限的存在性。这里要特别注意两个无穷大量相减不能直接用四则运算，因为无穷大量不是有限量，不能轻易地认为两个无穷大量相减就等于零。 若遇到极限不存在，两个无穷大量相减或幂指函数型极限的情况，往往我们可以对表达式做恒等变形，使得极限都存在且有限。其二、分母极限不能为零。若为零，就要想办法约去零因子才能用四则运算。有些可以直接约去，但有些难以直接约去零因子，这就需要结合使用无穷小等价替换及洛必达法则等技巧。其三、参加运算的函数必须为有限个。若有无穷多个函数的加减或乘除，就需要先转化为有限项才能使用四则运算。转化的技巧有些可以使用公式，比如等差数列、等比数列或每一项能拆成两项，前后可以抵消的数列。否则我们可能要考虑两面夹定理、定积分等方法来处理。 比如 2021 年考研数学中的一个求极限的题目。

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

分析：因为表达式里面两个函数相减，不难看出两个极限当 $x\to0$ 时，都是无穷大量，因此不能直接利用四则运算。此题可以先通分，通分之后，容易判断分子及分母各项极限都存在且有限，不难发现然后分母可用等价无穷小替换，另外再结合洛必达法则。

解 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot(1+\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t)-(e^x-1)}{(e^x-1)\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot(1+\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t)-(e^x-1)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x\cdot(1+\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t)+\sin x\cdot e^{x^2}-e^x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x\cdot(1+\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t)+2\cos x\cdot e^{x^2}+\sin x\cdot e^{x^2}\cdot 2x-e^x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}。$$

下面是 2024 年考研数学中的一个填空题。

例 2 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+ax^2)^{\sin x}-1}{x^3}=6$,则 $a=$__________.

分析： 表达式里含有幂指函数，这类极限题可以利用公式 $u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$ 转化，

然后可以使用等价无穷小替换 .

解 $6=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+ax^2)^{\sin x}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x\cdot\ln(1+ax^2)}-1}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\ln(1+ax^2)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{ax^3}{x^3}=a.$$

其次，是等价无穷小的运用。 事实上，这个方法的技巧非常简单，就是记住当 $x\to0$ 时，一些常用等价无穷小量即可，常用的结论有：$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$ 和 $\sin x,\arcsin x,\tan x,\arctan x,\ln(1+x),e^x-1\sim x$.

但一定要注意在使用过程中，$x\to0$ 并不是必须的。事实上，若函数 $u(x)\to0$，

则有如下结论：

$$1-\cos u(x)\sim\frac{u^2(x)}{2} \quad 和 \quad \sin u(x),\arcsin u(x),$$

$$\tan u(x),\arctan u(x),\ln(1+u(x)),e^{u(x)}-1\sim u(x)。$$

两面夹法则和单调有界准则是突破 “四则运算、等价替换等方法失效” 的关键工具，但使用时需紧扣其适用条件：两面夹法则的核心是 “精准缩放，上下界同极限”；单调有界准则的核心是 “双条件验证”：需同时证明数列（或函数）单调递增（或递减）和有上界（或下界），缺一不可。 单调有界准则仅能证明极限存在，若要求具体值，可能要方程两边求极限，然后解方程，解方程后需验证解的合理性（如是否符合有界性），避免因递推式的多解导致错误。二者均需结合具体问题的结构特征灵活应用，避免机械套用导致逻辑漏洞。

泰勒公式是处理复杂极限（尤其是含三角函数、指数函数、对数函数的“$\dfrac{0}{0}$ 型”或“函数值差”）的“万能工具”。但核心在于精准控制展开阶数、正确处理余项、匹配无穷小阶数。精准控制展开阶数关键是展开到合适的阶数,需与表达式中最低阶的无穷小项保持一致，避免展开不足。通过泰勒展开可将抽象的函数差转化为具体的多项式运算，结合极限四则法则高效求解，是竞赛和考研中突破难题的关键技巧。泰勒公式展开的是在极限过程中趋于 0 的函数（即无穷小量），对于非无穷小量（如常数、极限为非零值的函数），无需展开。

利用定积分求极限的核心是 “还原定积分的定义过程”：将无限项和的极限严格对应到“分割、近似、求和、取极限” 的四步法中，尤其注意仅适用于 n 项和极限，且需准确匹配被积函数与积分区间。此法相对来说困难程度较高，本文不深入展开讨论。

在极限计算中，前文提及的四则运算、等价无穷小替换、洛必达法则、泰勒公式等多种方法，在应对复杂问题时往往需要结合使用。这种综合性应用使得极限解题呈现出多样化的方法与技巧。而一题多解的训练模式，能够有效促使学生将各类重要的极限计算方法及技巧融会贯通，在实践中提升综合运用能力，进而深化对极限知识体系的理解与掌握。 能有效的开发学生的创造灵感，培养学生的发散性思维，从而提高学生的综合素质[2]. 因此有不少数学工作者研究了一题多解的作用[2,3,4]. 适当地让学生做一些一题多解的题，不仅可以起到复习数学知识的作用，而且可以促使学生将众多知识点有机的联系在一起 . 让学生对所学知识有一个整体的认识. 下面我们讨论一个竞赛题的一题多解。

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos(\sin x)}{1-\cos x^2}$（2022 年第 19 届江苏省高等数学竞赛本科二级题 3).

所求表达式中，分母显然可以使用等价无穷小替换．然而分子的处理要困难一些，有很多学生不会计算．其实，如果令 $f(x)=\cos x$，分子就是 $f(x)-f(\sin x)$．相当于是两个函数值之差．因此我们可以考虑如下几种方法，一是利用和差化积公式，

解法一

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)}{1-\cos x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{x+\sin x}{2}\sin\frac{x-\sin x}{2}}{\frac{x^4}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^4}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x^3}{6}}{x^3}=-\frac{1}{3}.$$

若我们使用拉格朗日中值定理，则有

解法二 $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)}{1-\cos x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin\xi\cdot(x-\sin x)}{\frac{x^4}{2}}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\xi}{x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}$$

其中，ξ 介于 x 与 $\sin x$ 之间．利用两面夹定理，易得 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\xi}{x}\quad 1$．

于是，我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)}{1-\cos x^2}$$

$$=-2\lim_{\to 0}\frac{\sin\xi}{}\cdot\lim_{\to 0}\frac{-\sin}{3}\quad=-2\cdot\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}.$$

事实上，对于函数值相减，又不能直接看出等价代换的表达式，可以考虑使用泰勒公式，因

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4),$$

将 x 替换为 $\sin x$，则有

$$\cos(\sin x)=1-\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^4 x}{4!}+o(\sin^4 x)\ .$$

所以，有如下解法

解法三

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)}{1-\cos x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-[1-\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^4 x}{4!}+o(\sin^4 x)]}{\frac{x^4}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2+\frac{2(x^4-\sin^4 x)}{4!}+o(x^4)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin 2x}{24x}=-\frac{1}{3}.$$

通过让学生先思考练习，再总结及讲解此极限的几种解法。不仅深化了学生对极限知识的理解，将高等数学中求极限的众多重要知识点及主要技巧，如重要极限、等价无穷小替换、罗比达法则、拉格朗日中值定理、泰勒公式、三角函数和差化积等有机的联系在一起。更重要的是让学生在同一道题中领悟不同解题思路，进而培养学生的数学创造思维，增加学生的解题成就感，激发学生学习高等数学的兴趣。

结语

对数学竞赛的一题多解研究，不仅有利于基础知识的回味、有利于解题的总结和提升， 还能有效激发学生的学习兴趣，对于提升学生的解题效率极具价值。因此，教师在高等数学教学时，应该有针对性地进行一题多解的训练，为他们学好高等数学提供一个比较好的途径。后续，我们将逐步研究函数微分学、积分学等在大学数学竞赛及考研数学中应用。

参考文献

[1] 李建明．聚焦一题多解样例，培养高职学生创造性数学思维 [J]．数学学习与研究，2020(25)：113—114.

[2] 宋玉英．线性代数中的一题多解与学生发散性思维的培养 [J]．高等数学研究，2006(9)：54-57.

[3] 邱云兰．高数变式多解“以学定教”模式的研究 [J]．牡丹江大学学报，2020(7)：80-86.

[4] 朱长青．一题多解在独立院校高数教学中的作用 [J]．教育教学论坛，2020(21)：319-320.

作者简介：王云杰，男，1978，汉，安徽阜阳，副教授，博士，主要从事大规模科学与工程计算的研究。

基金项目：江苏省高校高质量公共课教学改革研究专项课题（2024GZJX149）。