

# 从数学核心素养角度看“数形结合” ——以“一元二次不等式的应用”的教学设计为例

胡晓翠

(浙江省绍兴市嵊州中学 浙江 绍兴 312400)

**【摘 要】**数形结合作为一种重要的数学思想和教学方法，贯穿整个高中数学学习过程，特别在数学核心素养体系中，更加强调通过培养学生的数形结合的思想方法来提高直观思维能力，帮助学生提升数学思维和数学情感

**【关键词】**数形结合；核心素养；解题教学

**【DOI】** 10.12252/j.issn.2096-627X.2020.08.563

## 1. 前言

十八大和十三届三中全会提出要将“立德树人”落到实处，2014年教育部研制印发《关于全面深化课程改革落实立德树人根本任务的意见》，提出“教育部将组织研究提出各学段学生发展核心素养体系，明确学生应具备的适应终身发展和社会发展需要的必备品格和关键能力”。那么，什么是数学学科的核心素养？它包括以下6个方面：数学抽象能力，逻辑推理能力，数学建模能力，数学运算能力，直观想象能力以及数据分析能力。

本文将以例题分析的形式展示数学解题教学中数形结合思想的运用，教师怎么教，学生怎么学，以及培养学生建模和画图的能力，达到“以形助教”“以数辅形”的效果；同时在数学解题思想方法上达到“授之以鱼不如授之以渔”。教师在课堂上的解题思路和方法直接影响学生对此类问题的思考和方法的运用，因此教师自身的专业素养在课堂教学上也是尤为重要的。

## 2. 数形结合在“一元二次不等式的应用”中的作用

曾有专家这样形容浙江省高考数学命题特点：简约中显大气，朴实中有灵气。言简意赅的解释了高考数学题型的特点：不再一成不变，既有文科韵味，又有理科的深度；注重基础，凸显能力，适度创新，有较好的区分度和适当难度。这些迹象都表明浙江省高考数学不简单，要求学生有更高数学素养，更好的数学解题方法和思维能力。数形结合作为一种重要的解题方法，学生必须掌握，只有这样才能将复杂的数学问题通过建模和画图直观化，拓展解题思路，提高解题能力。下面我将以“一元二次不等式的应用”为例进行分析。

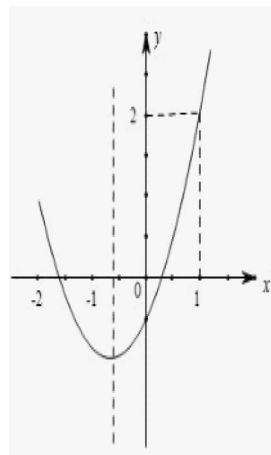
**预备知识：**下面我将以列表的形式分析二次函数图象，一元二次方程的根与一元二次不等式的解集之间的关系。

**设计意图：**帮助学生归纳总结“三个二次”的关系，培养学生分析问题和分类整理的能力。

### (1) 以形助数

借助图形的生动性和直观性来阐述数之间的联系，将图形语言转化为数学符号语言，达到快速解题的效果。

例1 已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象如图所示，



给出下列论断：①  $abc > 0$ ，②  $a - b + c < 0$ ，③  $b < 1$ ，

④  $a > \frac{1}{2}$ 。其中正确的结论是：②④。

分析：由图知，(1)函数图象的开口向上，即可知  $a > 0$ ；(2)函数图象与  $y$  轴的交点在负半轴，可知  $c < 0$ ；(3)图象的对称轴  $x = -\frac{b}{2a} < 0$ ，知  $b > 0$ ，故  $abc < 0$ 。因此①错误；(4)当  $x = -1$

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的根	有两个相异实数根 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} (x_1 < x_2)$	有两个相等实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实数根
一元二次不等式的解集	$ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$	$\{x   x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\{x   x \neq -\frac{b}{2a}\}$
	$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$	$\{x   x_1 < x < x_2\}$	$\emptyset$

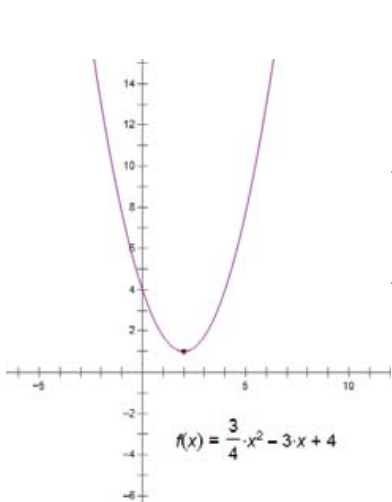


图 1

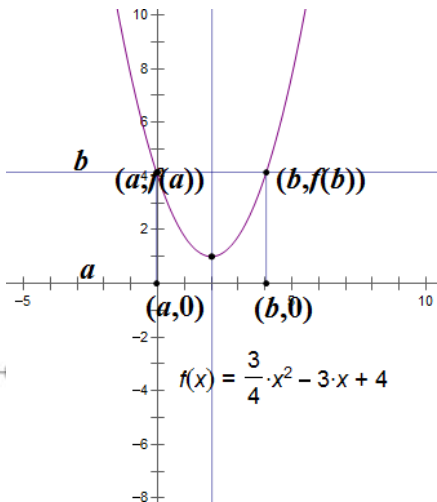


图 2

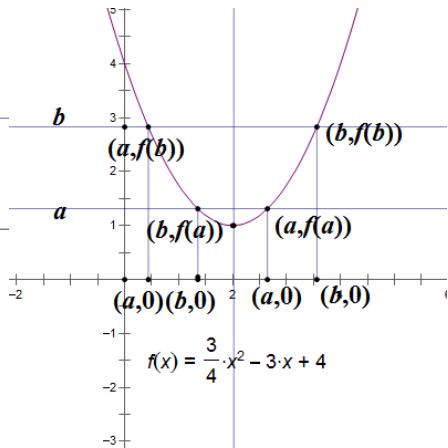


图 3

时, 显然图象所对应的函数值  $y < 0$ , 即将  $x = -1$  代入  $Y$  中, 得  $a - b + c < 0$ . 故 ② 正确; (5) 当  $x = 1$  时,  $y = 2$ , 即有  $a + b + c = 2$ , 将  $a + c = 2 - b$  代入  $a - b + c < 0$  中可得  $b > 1$ . 故 ③ 错误;

(6) 因为对称轴  $-1 < x = -\frac{b}{2a} < 0$ , 解得  $a > \frac{b}{2}$ , 又因为  $b > 1$ , 所以  $a > \frac{1}{2}$ . 故 ④ 正确; 因此答案选择 ②④.

设计意图: 本题考查了二次函数图象的性质, 通过观察图象的零点, 对称轴以及一些特殊点对应的函数值与零的大小关系, 找出系数之间满足的数量关系, 从而解决问题. 这种转化的思想培养了学生的观察能力, 概括能力, 探究能力及创新意识.

(2) 以数辅形

借助于数的精确性和规范严密性来阐明形的某些属性, 以数作为手段, 形作为目的, 数形结合来解决一些重要的数学问题.

例2 已知不等式  $a \leq \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4 \leq b$  的解集为  $[a, b]$ , 则实数  $a = 0, b = 4$ .

分析: 令  $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4$ , 即可将本题转化成不等式组  $\begin{cases} f(x) \geq a \\ f(x) \leq b \end{cases}$  的解集为  $[a, b]$ .

图1为函数  $f(x)$  的图象, 顶点坐标为  $(2, 1)$ , 即  $f(x)$  的最小值为 1. 下面我们将对  $a$  与 1 的大小关系进行分类讨论.

i 当  $a \leq 1$  时, 如图2所示, 此时一元二次不等式组  $\begin{cases} f(x) \geq a \\ f(x) \leq b \end{cases}$  的解集为  $[a, b]$  等价于一元二次不等式  $f(x) \leq b$  的解集为  $[a, b]$ . 因为  $f(x)_{\min} = 1$ , 而  $a \leq 1$ , 故  $f(x) \geq a$  恒成立.

即由图 2 知, 函数  $f(x)$  满足  $\begin{cases} f(a) = b \\ f(b) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}a^2 - 3a + 4 = b \\ \frac{3}{4}b^2 - 3b + 4 = b \end{cases}$ , 解得  $b = \frac{4}{3}$

或 4. 当  $b = \frac{4}{3}$  时,  $a = \frac{4}{3}$  或  $\frac{8}{3}$ . 因为  $a < b$ , 故均不成立; 当  $b = 4$  时,  $a = 0$  或 4. 因为  $a < b$ , 故  $a = 0$ , 即此时  $\begin{cases} a = 0 \\ b = 4 \end{cases}$ .

ii 当  $a > 1$  时, 分析可知,  $x \in [a, b]$  只能在对称轴的同一侧, 如图3所示.

a 当  $b \leq 2$  时, 均在对称轴的左侧, 如图 3, 则有

$$\begin{cases} f(a) = b \\ f(b) = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}a^2 - 3a + 4 = b \\ \frac{3}{4}b^2 - 3b + 4 = a \end{cases}$$

解得  $\begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$ . 因为  $a < b \leq 2$ , 故不符合题意要求, 舍掉.

b 当  $a \geq 2$  时, 均在对称轴的右侧, 如图 3, 即有

$$\begin{cases} f(a) = a \\ f(b) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}a^2 - 3a + 4 = a \\ \frac{3}{4}b^2 - 3b + 4 = b \end{cases}$$

解得  $a = \frac{4}{3}$  时,  $b = 4$ ;  $a = 4$  时,  $b = \frac{4}{3}$ . 因为  $2 \leq a < b$ , 故两种情况均不符合题意要求, 舍掉. 综上所述可知,

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 4 \end{cases}$$

设计意图: 本题考察了两个“二次”间的关系, 灵活运用函数的思想, 通过数形结合分析和解决实际问题的能力. 意在培养了学生逻辑思维能力, 分析和解决问题的能力以及直观思维能力.

3. 数形结合研究的意义

学生要求掌握数形结合的数学思想方法最终目的就会解题, 那么它可以帮助学生分析和解决哪些常见数学题型?

- ① 构建函数模型并结合图象求参数的取值范围.
- ② 构建函数模型并结合图象研究方程根的范围及根的个数.
- ③ 构建解析几何中的斜率、截距、距离、面积等函数模型研究函数最值问题和集合间并交补运算问题.

4. “数形结合”在解题方法和培养学生思维上凸显的优势

数形结合是解决数学问题最有效方法之一, 它能将数量和图形完美的结合, 最直观的揭示数学问题的本质. 同时, 在图形上只需草图画出来即可, 不需要很精确的图象. 这些优势尤其是选择题和填空题时技巧性发挥得淋漓尽致, 提高了学生的解题速度, 锻炼了学生的思维能力. 有效的应用“数形结合”, 可以培养学生学习数学的兴趣, 引发学生多方面发散思维和直观想象力, 达到培养学生数学核心素养的要求.

5. 结束语

数学家华罗庚说: 数形结合百般好, 隔离分家万事休; 几何代数统一体, 永远联系莫分离. 说明了数形结合的思想在数学中占有重要的地位. 在运用数形结合思想分析解决问题时, 切记三个原则:

- ① 条件的等价性原则;
- ② 数与形的双方性原则;
- ③ 结合后的简单性原则.

只要把握好这三点, 数形结合的思想才能应用到实处.

参考文献

[1] 华志远. 透视数学核心素养, 漫话课堂转型抓手[J]. 数学通讯, 2016(7).  
 [2] 许轶丰. 问题“串”起来思维“活”起来[J]. 中学数学月刊, 2016, 8  
 [3] 杨渭清. 谈中学数学思想方法的教学[J]. 青海教育, 2014(04).