常规思路 一题多解
一道解析几何习题的解法探究

陈锋望

（湖南平江县平江第七中学 湖南 岳阳 414501）

[摘 要]本文引导学生多角度思维，帮助学生如何运用常规的思路，切入问题，寻求分析和解决问题的一般途径

关键词 椭圆；解法；方程组法；代点法；勾股定理

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2021.04.600

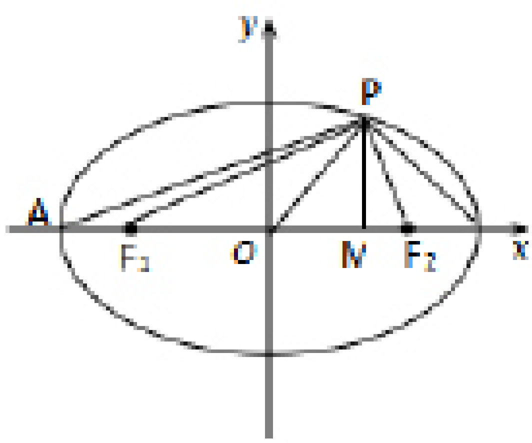
一、问题

人民教育出版社A版本普通高中课程标准实验教科书《数学》选修2-1第81页B组第一题：已知点P是椭圆$16x^2+25y^2=1600$上一点，且在x轴上方，F_1,F_2分别是椭圆的左右焦点，直线PF_2的斜率为$-4\sqrt{3}$，求ΔPF_1F_2的面积。

分析：将椭圆方程化为标准方程可得$a=10,b=8,c=6,|F_1F_2|=12$，只需求出点P的纵坐标就可求出ΔPF_1F_2的面积。学生的思路比较单一，由PF_2直线与椭圆联立方程组求解，但系数比较大，出错频频。本文拟从常规思路入手，从不同角度探究，寻求问题的解决方案。

二、解法探究

1解法一：方程组法



直线PF_2的斜率为$-4\sqrt{3}$，点F_2的坐标为$(6,0)$，PF_2的方程为$y=-4\sqrt{3}(x-6)$，代入椭圆方程得：

$19x^2-225x+650=0$，解得$x_1=5$，$x_2=130$（舍去）

所以$y=4\sqrt{3}$，$S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times12\times4\sqrt{3}=24\sqrt{3}$。

2解法二：代点法

过P作$PM\perp F_1F_2=M$，因为PF_2的斜率为$-4\sqrt{3}$，即$\tan\angle PF_2x=-4\sqrt{3}$.

所以$M\in F_1F_2,\cos\angle PF_2M=\frac{1}{7}$，设$|MF_2|=m$，则点P的坐标为$(6-m,4\sqrt{3}m)$，将点P坐标代入椭圆方程$16x^2+25y^2=1600$得：$19m^2-3m-16=0$，得$m_1=1$，$m_2=-\frac{16}{19}$（舍去），所以$|MP|=4\sqrt{3}m=4\sqrt{3}$，

$S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times12\times4\sqrt{3}=24\sqrt{3}$。

3方法三：运用勾股定理

过P作$PM\perp F_1F_2=M$，因为PF_2的斜率为$-4\sqrt{3}$，即$\tan\angle PF_2x=-4\sqrt{3}$

设$|MF_2|=m$，则$|MP|=4\sqrt{3}m,|MF_1|=12-m,|PF_1|=20-7m$，

由勾股定理得$|PF_1|^2=|MF_1|^2+|MP|^2$，即$(20-7m)^2=(4\sqrt{3}m)^2+(12-m)^2$

解得$m=1$，$|MP|=4\sqrt{3}$，$S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times12\times4\sqrt{3}=24\sqrt{3}$。

4方法四：运用余弦定理

过P作$PM\perp F_1F_2=M$，因为PF_2的斜率为$-4\sqrt{3}$，即$\tan\angle PF_2x=-4\sqrt{3}$.

则$\cos\angle PF_2M=\frac{1}{7}$，即$\cos\angle PF_2M=\frac{|PF_2|^2+|F_1F_2|^2-|PF_1|^2}{2|PF_2|\cdot|F_1F_2|}=\frac{1}{7}$，

$\frac{49m^2+144-(20-7m)^2}{2\times7m\times12}=\frac{1}{7}$，有$m=1$，$|MP|=4\sqrt{3}$，$S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times12\times4\sqrt{3}=24\sqrt{3}$

5方法五：运用正弦定理

过P作$PM\perp F_1F_2$于M，设$|MF_2|=m$ $\because PF_2$斜率为$-4\sqrt{3}$，

$\therefore\tan\angle PF_2x=-4\sqrt{3},\tan\angle PF_2F_1=4\sqrt{3}$，$\therefore\sin\angle PF_2F_1=\frac{4\sqrt{3}}{7},\cos\angle PF_2F_1=\frac{1}{7}$

$|PF_2|=7m,|PM|=4\sqrt{3}m,|PF_1|=20-7m,\tan\angle PF_1F_2=\frac{4\sqrt{3}m}{12-m}$

$\therefore\sin^2\angle PF_1F_2=\frac{48m^2}{49m^2-24m+144}$ 由正弦定理得：$\frac{|PF_2|^2}{\sin^2\angle PF_1F_2}=\frac{|PF_1|^2}{\sin^2\angle PF_2F_1}$

代人数据得：$$\frac{49m^2}{\frac{48m^2}{49m^2-24m+144}}=\frac{(20-7m)^2}{(\frac{4\sqrt{3}}{7})^2}$$

解得$m=1$，$|MP|=4\sqrt{3}$，$S=\frac{1}{2}|F_2F_1|\cdot|PF_2|\sin\angle PF_2F_1=24\sqrt{3}$。

三、教育功能探究

1题目难度不大，但解法灵活多变，思维活跃，思路开阔，能较好地激活学生的学习兴趣，开启学生的智慧，引导学生全面审题，多角度寻找突破点。

2 给师生提供了一个探究与比较的平台，一方面由我们学过哪些求三角形面积的计算公式开始探究，运用这些公式需要求出哪些元素？用什么原理求？怎样作辅助线？探索过程中出现的新问题如何解决？另一方面，这些常规解法中，大多数解法得到了一元一次方程，简化了解法，减少了出错机会；

3 题目提示我们平时的教学要注意综合各模块的知识，融会贯通，不能孤立地就事论事。

参考文献

[1]朱永婷.一道空间解析几何习题的多种解法[J].高等数学研究，2019,22(02):37-38.