连续函数平均值的研究

沈荣泸

（泸州职业技术学院　四川　泸州　646000）

[摘　要]平均值是统计学上一个重要的概念，在日常生活与科学研究中有着广泛的应用。在中小学数学学习中主要针对的是离散型数据的平均值，但在区间上连续函数的函数值却有无限多个，不能一一列举，那么该怎么解决区间上连续函数的平均值呢？本文在离散型数据的平均值公式基础上，借助定积分的定义得出区间上连续函数的平均值结论，并进一步得出正值连续函数的几何平均值，调和平均值结论，以及正值连续函数下算术平均值，几何平均值，调和平均值三者的关系。为进一步研究连续函数在区间上的各种统计规律打下基础，让统计的应用更加广泛。

[关键词]平均值；均值定理；连续函数；定积分

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2021.05.300

1、准备知识

1.1离散型有限个数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的算术平均值公式为 $A=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$；

1.2离散型有限个正数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的几何平均值公式为 $G=\sqrt[n]{y_1\cdot y_2\cdot\cdots\cdot y_n}$；调和平均值公式为 $H=\frac{n}{\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_n}}$；

1.3离散型有限个正数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 满足均值定理：$H\le G\le A$。

1.4定积分定义：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 可积，则 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$；其中：$[a,b]$ 任意分割下的第i个小区间为 $[x_{i-1},x_i]$，其长度 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$；而 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$。

2、下面讨论连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值

由于 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，所以一定可积。步骤如下：

2.1首先将区间 $[a,b]$ 进行n等分，得 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度为 $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$，取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，对应函数值 $f(\xi_i)$，$i=1,2,\cdots,n$。

2.2其次求出n个函数值 $f(\xi_i)$ 的平均值，即 $\bar{y}=\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\cdots+f(\xi_n)}{n}$

变形为 $\bar{y}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{f(\xi_i)}{n}=\frac{1}{b-a}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\frac{b-a}{n}=\frac{1}{b-a}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

2.3最后在 $[a,b]$ 中插入的等分点无限增加时，此时 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}=\frac{b-a}{n}$，则 $\lambda\to 0\Leftrightarrow n\to\infty$，可定义连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的算术平均值为

$$A=\lim_{n\to\infty}\bar{y}=\frac{1}{b-a}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

2.4借助定积分定义可得连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的算术平均值为

$$A=\frac{1}{b-a}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

3、正值函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，类似可定义 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的几何平均值 G，调和平均值 H

3.1与前面讨论一样，在n等分下的n个函数值 $f(\xi_i)$ 的几何平均值为

$$\bar{g}=\sqrt[n]{f(\xi_1)\cdot f(\xi_2)\cdot\cdots\cdot f(\xi_n)}=e^{\ln\sqrt[n]{f(\xi_1)\cdot f(\xi_2)\cdot\cdots\cdot f(\xi_n)}}=e^{\frac{1}{b-a}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f(\xi_i)\frac{b-a}{n}}=e^{\frac{1}{b-a}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f(\xi_i)\Delta x_i}$$

当在 $[a,b]$ 中插入的等分点无限增加时，即 $n\to\infty$，可定义正值连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的几何平均值为

$$G=\lim_{n\to\infty}\bar{g}=\lim_{\lambda\to 0}e^{\frac{1}{b-a}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f(\xi_i)\Delta x_i}=e^{\frac{1}{b-a}\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f(\xi_i)\Delta x_i}$$

因为 $f(x)>0$，所以 $\ln f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，借助定积分定义可得正值连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的几何平均值为 $G=e^{\frac{1}{b-a}\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f(\xi_i)\Delta x_i}=e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)dx}$

3.2与前面讨论一样，在n等分下的n个函数值 $f(\xi_i)$ 的调和平均值为

$$\bar{h}=\frac{n}{\frac{1}{f(\xi_1)}+\frac{1}{f(\xi_2)}+\cdots+\frac{1}{f(\xi_n)}}=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{f(\xi_i)}}=\frac{b-a}{\frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{f(\xi_i)}}=\frac{b-a}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{f(\xi_i)}\Delta x_i}$$

当在 $[a,b]$ 中插入的等分点无限增加时，即 $n\to\infty$，可定义正值连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的调和平均值为

$$H=\lim_{n\to\infty}\bar{h}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{b-a}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{f(\xi_i)}\Delta x_i}=\frac{b-a}{\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{f(\xi_i)}\Delta x_i}$$

因为 $f(x)>0$，所以 $\frac{1}{f(x)}$ 在区间 $[a,b]$ 连续，借助定积分定义可得正值连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的调和平均值为 $H=\frac{b-a}{\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{f(\xi_i)}\Delta x_i}=\frac{b-a}{\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx}$

3.3针对 $[a,b]$ 正值连续函数 $f(x)$，在n等分下的n个函数值 $f(\xi_i)$ 满足均值定理

$$\frac{n}{\frac{1}{f(\xi_1)}+\frac{1}{f(\xi_2)}+\cdots+\frac{1}{f(\xi_n)}}\le\sqrt[n]{f(\xi_1)\cdot f(\xi_2)\cdot\cdots\cdot f(\xi_n)}\le\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\cdots+f(\xi_n)}{n}$$

可得 $\frac{b-a}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{f(\xi_i)}\Delta x_i}\le e^{\frac{1}{b-a}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f(\xi_i)\Delta x_i}\le\frac{1}{b-a}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

当在 $[a,b]$ 中插入的等分点无限增加时，即 $n\to\infty$ 时，由极限保号性可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{f(\xi_i)}\Delta x_i}\le\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{b-a}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f(\xi_i)\Delta x_i}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

即 $\frac{b-a}{\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx}\le e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)dx}\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

表明区间 $[a,b]$ 上的正值连续函数 $f(x)$ 仍然满足均值定理

$$H=\frac{b-a}{\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx}\le G=e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)dx}\le A=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

即区间 $[a,b]$ 上的正值连续函数 $f(x)$ 仍然满足调和平均值不超过几何平均值，几何平均值不超过算术平均值。也就是可以将正值离散型均值定理推广到正值连续函数上去。

参考文献

[1]李长明，周焕山.初等数学研究[M].北京：高等教育出版社，1995.

[2]同济大学应用数学系.高等数学[M].第五版.北京：高等教育出版社，2002.

[3]叶永春，陈芳.高等数学（上册）[M].北京：高等教育出版社，2017.

作者简介：

沈荣泸（1966--），男，汉族，四川泸州，大学本科，副教授，研究方向：数学教育教学