圆锥曲线中两条线段的和差最值问题

郑楠

（汕头市潮阳林百欣中学　广东　汕头　515100）

[摘　要]圆锥曲线中两条线段的和差最值问题是高考数学的常考点之一，难度略大，其难点在于如何利用通过利用圆锥曲线的定义、几何性质以及平面几何中的定理、性质等分析出取最值时的位置或状态。

[关键词]数学核心素养；认知结构；定点；动点

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2021.06.236

一、教学内容分析

本课选自人教A版高中数学选修2-1第二章《圆锥曲线与方程》，是一节高三一轮复习课。最值问题是高考的热点，而圆锥曲线的最值问题几乎是高考的必考点，不仅会在选择题或者填空题中进行考察，在综合题中也往往将其设计为考查的核心。

二、学生学习情况分析

我所任教的班级选科是历史+生物+化学，学生的特点是：参与课堂教学活动的积极性较强，有浓厚的求知欲，但是逻辑思维偏弱，计算能力较差，使用数学语言的表达能力也略显不足。

三、教学策略的选择与设计

本节课体现了逻辑推理、数学建模、数学运算、直观想象的数学核心素养。

在新课程的背景下，提倡“问题探究”“问题解决”应该贯穿在整个教学过程中，成为课堂教学发展的一条主线。由于这部分知识较为抽象，难以理解，如果离开直观感知，容易使学生陷入困境，降低学习热情。为了达到教学目标，本节课将分三步走：

1、强化认知结构

良好的认知结构对于问题的表征和策略的采用都起十分重要的作用。本节课的关键在于“利用圆锥曲线的定义”以及“平面几何中的定理、性质”，所以在解题过程中，要强化学生的这种认知，让他们能够顺利分析出可采用的解题策略；

2、启发式教学

在产生解答阶段，解决策略的选择和解决定势会影响问题的解决。因此在教学中，我会借助GeoGebra动画，引导、启发学生主动发现问题、直观感知并尝试解决问题，主动参与教学，在逻辑严密的环境中发现、获取新知，提高教学效率。

3、提炼模型

对于圆锥曲线中求线段和或者线段差的最值问题，一般采用数形结合的方法来做，但在利用数形结合的过程中为什么有些线段和求最值要先转化成线段差，而有些线段和求最值就不需要转化成线段差？定点、动点相对位置的不同影响着解题策略，因此需要对模型进行提炼总结，促进学生快速、正确的解决问题，进而强化该知识点。

四、教学目标

1、深刻理解并熟练掌握圆锥曲线的定义，能灵活应用定义解决问题；

2、通过对定点位置的不同设计，强化对圆锥曲线定义的理解，和对平面几何性质的应用，培养思维的深刻性、创造性、科学性和批判性，提高空间想象力及分析、解决问题的能力；通过对问题的不断引申，精心设问，引导学生学习解题的一般方法及联想、类比、猜测、证明等合情推理方法；

3、借助GeoGebra动画辅助教学，激发学习数学的兴趣，在民主、开放的课堂氛围中培养学生敢想、敢说、勇于探索、发现、创新的精神。

五、教学重点与难点

[教学重点]

1、对圆锥曲线定义的理解；2、平面几何中的定理、性质；

[教学难点]

巧用圆锥曲线定义解题；

六、教学环境（资源）

1、PPT课件：展示实例，示范解题思路和过程，总结知识点；

2、GeoGebra：动态直观地展示圆锥曲线中定点、动点与线段之间的巧妙联系，并通过合理猜想，运用圆锥曲线的定义，将线段进行合理的转化。

七、教学过程设计

（一）开门见山，提出问题

1、椭圆

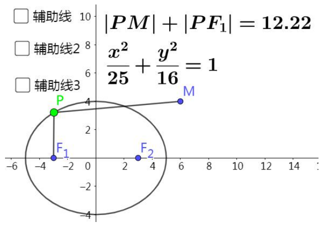
（1）已知定点在椭圆外

设 F_1、F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的左、右焦点，P 为椭圆上任意一点，点 M 的坐标为（6，4），求 $|PM|+|PF_1|$ 的取值范围。

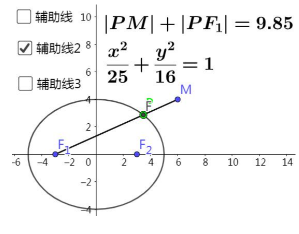
[解析]由题易知，点 M 在椭圆外。

最小值求解：

在 $\triangle F_1PM$ 中，$|PM|+|PF_1|>|F_1M|$，当 F_1、P、M 三点共线时，$(|PM|+|PF_1|)_{min}=|F_1M|=\sqrt{97}$



图（1）



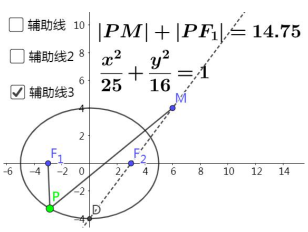
图（2）

[设问]利用GeoGebra动画，如图（1）所示，是否可以发现何时线段和达到最小？

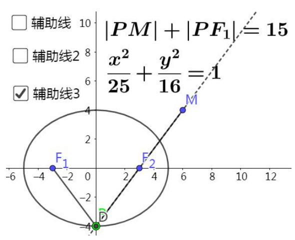
[设计意图]学生结合动画，利用平面几何的性质发现，当动点在两定点所在线段上时，线段和达到最小，引出图（2）.

最大值求解：

根据椭圆的定义，$|PF_1|=2a-|PF_2|$，$\therefore |PM|+|PF_1|=|PM|+2a-|PF_2|=10+|PM|-|PF_2|$，即求$(|PM|-|PF_2|)_{max}$，在$\triangle F_2PM$中，$|PM|-|PF_2|<|MF_2|$，$\therefore$当$F_2$、$P$、$M$三点共线且$P$在$MF_2$的延长线上时，$(|PM|-|PF_2|)_{max}=|MF_2|=5$，$\therefore (|PM|+|PF_1|)_{max}=15$



图（3）



图（4）

[设问]利用GeoGebra动画，在点P运动过程中发现，当移动到点D时线段和达到最大，为什么？

[设计意图]引导学生发现线段和的最大值为当F_2、P、M三点共线且P在MF_2的延长线上时，启发他们利用“椭圆的定义”进行线段间的转化。

（二）小试牛刀，深化认识

2、双曲线

例、已知点F_1是双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$的左焦点，定点$A(1,4)$，$P$是双曲线右支上动点，求$|PA|+|PF_1|$的最小值。

由题易知，P、A、F_1无法三点共线，$\therefore$先根据定义，$|PA|+|PF_1|=|PA|+2a+|PF_2|=4+|PA|+|PF_2|$，显然当$P$在线段$AF_2$上时，$(|PA|+|PF_2|)_{min}=|AF_2|=5$，所以$(|PA|+|PF_1|)_{min}=4+5=9$

3、抛物线

例、已知点P在抛物线$y^2=4x$上，那么点P到点$Q(2,-1)$的距离与点P到抛物线焦点F的距离之和的最小值是多少？

由题易知，点P无法在线段FQ上，所以须根据抛物线定义，$|PQ|+|PF|=|PQ|+|PM|$，在$\triangle QPM$中，当点P在线段MQ上时，$(|PQ|+|PM|)_{min}=QM=3$，$\therefore (|PQ|+|PF|)_{min}=3$

[设计意图]让学生学会举一反三，强化对圆锥曲线定义、平面几何的性质定理的认识。分清楚动点在圆锥曲线内或者外所采用的不同求解思路。

（三）课堂小结，总结归纳

[设问]本节课你学习到了什么？

[设计意图]强化认识，简单扼要的课堂小结可以让学生更加深刻的理解知识要点。

线段和差问题都是两个定点和一个动点，而平面上的三点要么组成一个三角形，要么三点共线。因此我们不难发现，不管是线段之和还是之差的最值，最终都回归到一个知识点：三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，当三点共线时，就可取最值。当动点可以在两定点所在的线段上时，动点到两个定点的距离之和取最小值，当动点可以在两定点所在线段的延长线上时，动点到两个定点的距离之差取最大值。

（四）反思拓展，发散思维

[设问]假如上面的题目全部改为求线段差的最值，又该如何求解呢？

[设计意图]激发学生的发散思维，强化知识的应用。

（五）课后练习，呼应反思

已知圆C_1：$(x-1)^2+(y+1)^2=1$，圆C_2：$(x-4)^2+(y-5)^2=9$.点M、N分别是圆C_1、圆C_2上的动点，P为x轴上的动点，则$|PN|-|PM|$的最大值是（　　）

A. $2\sqrt{5}+4$　　B. 9　　C. 7　　D. $2\sqrt{5}+2$

[设计意图]讲练结合，将学生的思考延伸到课外，与前面的拓展反思相呼应，深化学生对知识的应用。

八、教学反思

优点：

1. 本节课的教学突出“两实”——实例、实践。力争做到：善用实例，强调实践。

2. 充分利用信息技术中的GeoGebra为学生提供数学实践的工具，让学生以一个创造者、发明者的身份去探索知识，发挥其主体地位。

3. 步步设疑，对同一曲线的定点位置的转换，使学生感受不到设计的痕迹，而是全身心投入到问题的解决过程中，在“润物无声”中，体会了化归与转化、数形结合的数学思想，逐步呈现逻辑推理、数学建模、数学运算的数学核心素养。

4. 围绕“动定结合”与“线段转化”，突出重点，突破难点。

不足：

为保证内容的完整性，未能留给学生非常充裕的时间去思考，节奏稍稍紧凑，希望下次能有所改进。

九、教学评价

教学评价是对教师与学生的双边评价，其中教师评价在上述总结与反思中提及，下面主要是对学生学习过程进行评价，它可以为教师和学生及时提供反馈信息，既是保证教师教学质量的依据，也是提高学生学习效率的有效手段。

参考文献

[1]2011——2020年全国新课标卷（Ⅰ　Ⅱ　Ⅲ卷）理科数学

[2]《普通高中数学课程标准（2003年版）》人民教育出版社 2003.04

[3]《普通高中数学课程标准（2017年版）》人民教育出版社 2018.01