小网格，大舞台
——在网格中作图和求角

陆院
（浙江省东阳市外国语学校，浙江　东阳　322100）

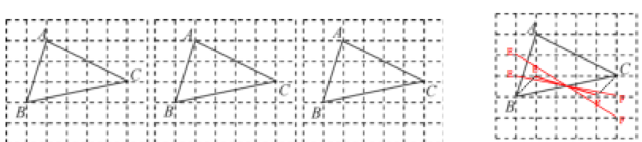
[摘　要]网格是数学学习的常用工具，它在图形的变换、求角或三角函数等问题中有着广泛的作用。数学课表中，关于几何作图，有两种方法——尺规作图和网格作图。尺规作图在课表中有明确要求，大家也都很熟悉。而网格作图却没有，因此很多老师往往不能很好地把握它的教学尺度。纵观近几年数学中考，网格问题频繁出现在各地区的中考卷中。本文就以中考题为例，探讨在网格中作图和求角或角的三角函数值，感受小小网格在我们数学问题中发挥的作用。

[关键词]网格；K型相似；直角三角形
【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2021.07.633

一、链接中考，在正方形网格中作图

（一）原题呈现

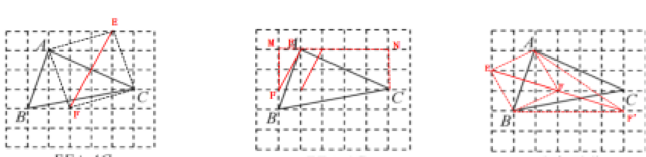
（2019金华）如图，在7×6的方格中，△ABC的顶点均在格点上，试按要求仅用不含刻度的直尺画出线段EF（E，F均为格点），各画出一条即可。



EF平分BC ①　　EF⊥AC ②　　EF垂直平分AB ③　　EF平分BC ①

[知识储备1]使用不含刻度的直尺作线段中点、中垂线、角平分线、等分线段等，往往需要通过格点图中的全等或相似，或利用正方形网格的对称性和45°特殊角，又或利用平行四边形、菱形、矩形等特殊平行四边形的相关性质。

分析①：要画EF平分BC，我们想到运用平行四边形的性质“对角线互相平分”，可以构造一个以BC为对角线的平行四边形，而构造平行四边形可以利用平行四边形的判定“对边平行且相等的四边形为平行四边形”，如右图，可见EF不唯一。



EF⊥AC ②　　EF⊥AC ②　　EF垂直平分AB ③

分析②：要画EF⊥AC，仿照分析①，想到可以运用菱形的性质“对角线互相垂直”来作图，作一个以AC为对角线的菱形。而构造菱形我们可以利用菱形的判定“四边都相等的四边形是菱形”，如右图，这样的EF只有唯一一条。

要画EF⊥AC，还可以运用“K型相似”，利用网格构造两个相似的直角三角形，如图，Rt△EMF∽Rt△CNE，可以推出∠MEF=∠NCE，根据在Rt△CNE中两锐角互余得出∠MEF+∠NEC=90°，故有∠FEC=90°，即EF⊥AC（此时点A与点E重合）。再利用网格的特征，构造与EF平行的线段，这些线段都与AC垂直，因此用这种方法构造的EF不止一条。

分析③：要作AB的垂直平分线EF，结合前面两小题的分析，我们就会想到正方形的性质“对角线互相垂直平分”，去构造一个以AB为对角线的正方形，如图。也可以根据中垂线的性质，利用网格特征，找到两个格点，使得它们到A，B两点的距离相等，这两点所在的直线就是线段AB的中垂线。

小结：本题起点低，入口宽，看似简单，由于做法不唯一，灵活性很强，考察的知识点很多，充分关注学生的“四基”。

（二）变式展现

1.如图1，在5×5的正方形网格中有一条线段AB，仅用一把无刻度的直尺，在网格中做出线段AB的中垂线，并保留作图痕迹，点A与点B均在格点上。

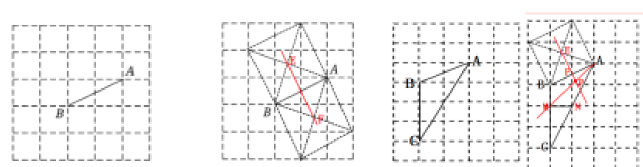


图1　　图2　　图3　　图4

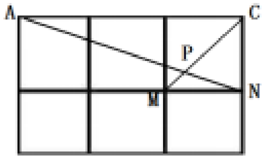
分析：要作AB的中垂线，仿照上题，我们在网格中构造以AB为对角线的正方形可以吗？尝试后发现此时顶点不在格点上，仅用一把无刻度的直尺没法画出来。尝试利用中垂线的性质，在网格中找到两个点，让它们到A，B两点的距离相等。受网格所限，直接画画不出来，利用我们所学的矩形性质“对角线互相平分且相等”，那就通过构造以AB为边的两个矩形，那么矩形对角线的交点到A，B两点距离相等，如图2，点E和点F，则直线EF就是线段AB的中垂线。

2.如图3，在线段AB的中垂线上找到一点P，使点P到边AB，AC距离相等，要求仅用一把无刻度的直尺，分析：要在直线EF上找到一点P，使点P到边AB，AC距离相等，点P应该在∠BAC的角平分线上。那如何在网格中仅用一把无刻度的直尺作一个角的角平分线？回顾课本角平分线的性质定理的证明，启发我们可以通过构造全等三角形来作角平分线。如图4，利用三边对应相等推出△ABM≌△ANM，则有∠BAM=∠NAM，那么AM就是∠BAC的角平分线，从而AM与EF的交点就是所求的点P。

二、链接中考，在正方形网格中求角

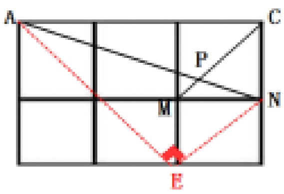
（一）原题呈现

（2018扬州）如图，在边长为1的正方形网格中，连结格点A、N和M、C，AN与MC相交于点P，求tan∠CPN的值。



[知识储备2]求一个锐角的三角函数值，我们往往需要找出（或构造出）一个直角三角形。当发现问题中这个角色不在直角三角形中，我们常常可以利用网格特征，画平行线等方法来解决。

方法一：如图，作EN//CM，则有∠CPN=∠ANE。利用网格特征构造直角三角形ANE，在Rt△AEN中，tan∠ANE=2，则有tan∠CPN=2。



方法二：如图5，作FE//MC，FG//AN，利用两次平行，根据“两直线平行，同位角相等”推得∠EFG=∠CPN。连接EG，发现△AEF∽△CGE，从而推得∠FEG=90°。因此在Rt△EFG中，tan∠EFC=$\frac{EC}{EF}$=2，从而有tan∠CPN=2。

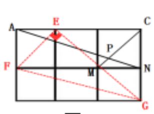


图5

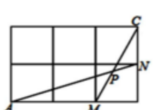


图6

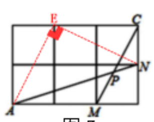


图7

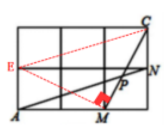


图8

（二）变式展现

1.如图6，在边长为1的正方形网格中，连接格点A，N与C，M，相交于点P，求tan∠CPN的值。

分析：本题中∠CPN所在的三角形不是直角三角形，而要求tan∠CPN，需要在某个直角三角形中。此时考虑可以利用网格的特征，通过平移，构造CM或者AN的平行线，将∠CPN转换到某个直角三角形中。

方法一：如图7，过A作AE//CM，连接EN。根据“两直线平行，同位角相等”得出∠CPN=∠EAN。利用“K型相似”证明∠AEN为直角。此时就将∠CPN转换到了直角三角形AEN中。

方法二：如图8，过C作CE//AN，连接EM。根据“两直线平行，同位角相等”得出∠CPN=∠ECM。利用“K型相似”证明∠CEM为直角。此时就将∠CPN转换到了直角三角形CEM中。

2.如图9，AB⊥BC，AB=4BC，点M在AB上，且AM=BC，延长CB到点N，使BN=2BC，连接AN交CM的延长线于点P，求tan∠CPN的值。

分析：有了前面几题的分析，我们想到可以将本题图形转换到网格中求解。根据条件“AB=4BC，AM=BC，BN=2BC”，以AM的长为一个单位长度建立网格，如图10。观察发现，∠CPN所在的三角形不是直角三角形，需要通过平移构造平行线来转换。


图9

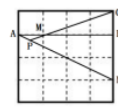


图10

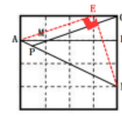


图11

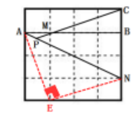
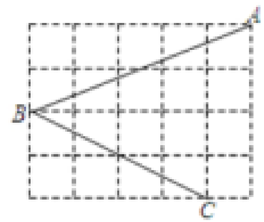


图12

方法一：如图11，过A作AE//PC，推得∠EAN=∠CPN。利用“K型相似”有∠AEN=90°，则△EAN是直角三角形。

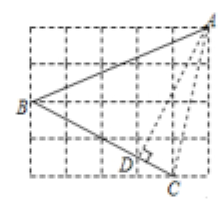
方法二：如图12，过N作NE//PC，推得∠ANE=∠CPN。利用“K型相似”有∠AEN=90°，则△EAN是直角三角形。

小结：利用网格，求三角函数值，若顶点不在格点上，通过平移转换角，构造直角三角形是常用的方法。在平移过程中，需要多动手尝试，结合网格的特征，不妨多画几条与已知线段平行的线段，有时只需要平移一条，有时需要平移两条。如果顶点在格点上的，我们也可以通过等积法求高线来解决。



3.如图所示，方格纸中每个小正方形的边长为1，A，B，C三点在格点上，则sin∠ABC=______。

分析：顶点B在格点上，过A作BC的高线或过C作AB的高线，垂足都不在格点上，不能直接根据勾股定理求其长度。那该怎么求高线的长？可以选择等积法去求解。如图，连接AC，过点A作AD⊥BC交BC于点D。利用网格特征，用“去白法”求出三角形ABC的面积为9，利用勾股定理求出BC的长为$2\sqrt{5}$、AB的长为$\sqrt{29}$，根据等积法：



$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\times AD$，求得$AD=\frac{9}{5}\sqrt{5}$，从而$\sin\angle ABC=\frac{AD}{AB}=\frac{9\sqrt{145}}{145}$。

三、教学建议

网格作图不同于尺规作图，画图工具比较少，需要运用网格本身的特征，涉及的知识点比较广，需要学生有较强的综合理解能力，这对学生来说是一个难点，而要突破这一难点的关键是对试题变式延伸后，通过一定量的例题示范和必要的练习来加以巩固。在整个教学过程中，可以让学生动手尝试在网格纸中画图，在这个过程中让学生自己总结作图和求角的方法，让学生经历了这样的探索全过程，即使经过一段时间之后，同样可以得出我们想要的结果。

参考文献

[1]陈新林.名师面对面[M].浙江工商大学出版社，2018