

圆锥曲线求解方法——妙借向量，无中生有

李亚敏

中央民族大学附属中学

[摘要]圆锥曲线是解析几何的重要内容，是整个高中数学的重点和难点，在历年的高考中都占有较大的比例.这部分知识庞杂、解题计算量大、综合程度高.平面向量兼具代数和几何的双重身份，它既具有形的直观特征，又具有数的美好计算性，是衔接代数与几何的纽带，沟通“数”与“形”，融数、形于一体，是数学知识的一个交汇点和联系多项知识的媒介.所以掌握向量这个工具，可以有效提升圆锥曲线的解题方向与运算效率.

[关键词]圆锥曲线;解析几何;高中数学

[DOI] 10.12252/j.issn.2096-627X.2021.08.1006

(2018·成都模拟)已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的

右焦点为 $F(\sqrt{3}, 0)$ ，长半轴与短半轴的比值为2.

(1)求椭圆C的方程;

(2)设经过点 $A(1, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于不同的两点 M, N .若点 $B(0, 1)$ 在以线段 MN 为直径的圆上，求直线 l 的方程.

解: (1)椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (求解过程略)

(2)易知当直线 l 的斜率为0或直线 l 的斜率不存在时，不合题意.

当直线 l 的斜率存在且不为0时，设直线 $l: x = my + 1$,

$M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

$$\text{联立} \begin{cases} x = my + 1, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 可得 } (4+m^2)y^2 + 2my - 3 = 0.$$

$$\Delta = 16m^2 + 48 > 0, \quad y_1 + y_2 = \frac{-2m}{4+m^2}, \quad y_1 y_2 = \frac{-3}{4+m^2}.$$

因为点 B 在以 MN 为直径的圆上，所以 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$.

因为 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN} = (my_1 + 1, y_1 - 1) \cdot (my_2 + 1, y_2 - 1) = (m^2 + 1)y_1 y_2 + (m - 1)(y_1 + y_2) + 2 = 0$,

$$\text{所以 } (m^2 + 1) \cdot \frac{-3}{4+m^2} + (m - 1) \cdot \frac{-2m}{4+m^2} + 2 = 0,$$

整理，得 $3m^2 - 2m - 5 = 0$ ，解得 $m = -1$ 或 $m = \frac{5}{3}$.

所以直线 l 的方程为 $x + y - 1 = 0$ 或 $3x - 5y - 3 = 0$.

关键点拨: 本题巧妙借助平面向量坐标运算来转化圆锥曲线中的相关问题，从形入手转化为相应数的形式，简化运算.点 $B(0, 1)$ 在以线段 MN 为直径的圆上，即以 MN 为直径的圆过点 B ，也即 $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{BN}$ ，而 $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{BN}$ 用向量语言可以“直译”为 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$.

我们要学会将解析几何问题中涉及的几何条件“翻译”为代数关系，用代数方法研究几何问题，这是解析几何的核

心方法.下面两个题目将线段的比值“翻译”为向量共线，构建知识之间的联系，简化运算，使问题化难为易.

(2019·长春监测)已知椭圆 C 的两个焦点为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$ ，且经过点 $E(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(1)求椭圆C的方程;

(2)过 F_1 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点(点 A 位于 x 轴上方)，若 $\overrightarrow{AF_1} = 2\overrightarrow{F_1B}$ ，求直线 l 的斜率 k 的值.

解: (1)椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. (求解过程略)

(2)由题意得直线 l 的方程为 $y = k(x + 1)$ ($k > 0$),

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x + 1), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 整理得 } (\frac{3}{k^2} + 4)y^2 - \frac{6}{k}y - 9 = 0, \quad \Delta = \frac{144}{k^2} + 144 > 0,$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } y_1 + y_2 = \frac{6k}{3 + 4k^2}, \quad y_1 y_2 = \frac{-9k^2}{3 + 4k^2},$$

又 $\overrightarrow{AF_1} = 2\overrightarrow{F_1B}$ ，故 $\overrightarrow{AF_1} = 2\overrightarrow{F_1B}$ ，所以 $y_1 = -2y_2$,

所以 $y_1 y_2 = -2(y_1 + y_2)^2$ ，即 $3 + 4k^2 = 8$ ，解得 $k = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$,

又 $k > 0$ ，所以 $k = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

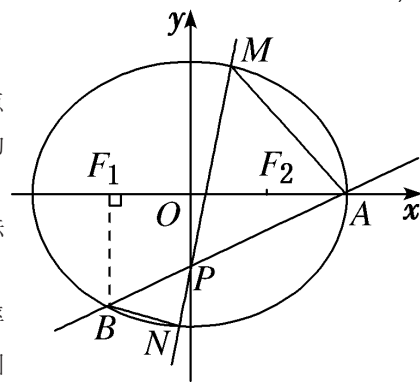
(2019·惠州调研)如图，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的

顶点为 $A(2, 0)$ ，左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过点 A 且斜率为 $\frac{1}{5}$ 的

直线与 y 轴交于点 P ，与椭圆交于另一个点 B ，且点 B 在 x 轴上的射影恰好为点 F_1 .

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)过点 P 且斜率大于 $\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆



交于M, N两点($|PM| > |PN|$), 若 $S_{\triangle PAM} : S_{\triangle PBN} = \lambda$, 求实数 λ 的取值范围.

解: (1) 椭圆C的标准方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 因为 $\frac{S_{\triangle PAM}}{S_{\triangle PBN}} = \frac{\frac{1}{2}|PA| \cdot |PM| \cdot \sin \angle APM}{\frac{1}{2}|PB| \cdot |PN| \cdot \sin \angle BPN} = \frac{2 \cdot |PM|}{1 \cdot |PN|} = \lambda \Rightarrow \frac{|PM|}{|PN|} = \frac{\lambda}{2} (\lambda > 2)$

, 所以 $\overrightarrow{PM} = -\frac{\lambda}{2} \overrightarrow{PN}$.

由(1)可知P(0, -1), 设直线MN的方程为 $y = kx - 1 (k > \frac{1}{2})$, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2),

联立方程, 得 $\begin{cases} y = kx - 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 化简得, $(4k^2 + 3)x^2 - 8kx - 8 = 0$.

8=0.

得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{8k}{4k^2 + 3}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-8}{4k^2 + 3}. \end{cases}$ (*)

又 $\overrightarrow{PM} = (x_1, y_1 + 1)$, $\overrightarrow{PN} = (x_2, y_2 + 1)$, , 有 $x_1 =$

$-\frac{\lambda}{2}x_2$, 代入(*)可得, $\frac{(2-\lambda)^2}{\lambda} = \frac{16k^2}{4k^2+3}$.

因为 $k > \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{16k^2}{4k^2+3} = \frac{16}{\frac{3}{k^2}+4} \in (1, 4) \in (1, 4)$, 即 1

$< \frac{(2-\lambda)^2}{\lambda} < 4$ 且 $\lambda > 2$, 解得 $4 < \lambda < 4 + 2\sqrt{3}$.

综上所述, 实数 λ 的取值范围为 $(4, 4 + 2\sqrt{3})$.

由上述两个题的解答过程可以看出, 用向量处理问题时简单明了. 用向量解题的前提是将要解决的问题与向量互译, 解题的关键是向量的运算. 在解题的过程中变抽象的逻辑推理为具体的向量运算, 实现数与形的结合. 学生要形成“遇数思形”的良好思维习惯, 从而加深理解知识要点, 增强应用意识, 优化认知结构.

(丰台高三模拟) 已知点在椭圆C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

上, F(1, 0)是椭圆的一个焦点.

(1) 求椭圆C的方程;

(2) 椭圆C上不与P点重合的两点D, E关于原点O对称, 直线PD, PE分别交y轴于M, N两点. 求证: 以MN为直径的圆被直线 $y = \frac{3}{2}$ 截得的弦长是定值.

(1) 解: 椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; (求解过程略)

(2) 证明: 因为D, E两点关于原点对称, 所以设 $D(m, n), E(-m, -n) (m \neq \pm 1)$

设以MN为直径的圆与直线 $y = \frac{3}{2}$ 交于 $G(t, \frac{3}{2}), H(-t, \frac{3}{2}) (t > 0)$ 两

点, 故 $GM \perp GN$.

直线PD: $y - \frac{3}{2} = \frac{n - \frac{3}{2}}{m - 1}(x - 1)$, 当 $x = 0$ 时, $y = \frac{3}{2} - \frac{n - \frac{3}{2}}{m - 1}$,

所以 $M(0, \frac{3}{2} - \frac{n - \frac{3}{2}}{m - 1})$.

直线PE: $y - \frac{3}{2} = \frac{-n + \frac{3}{2}}{-m - 1}(x - 1)$, 当 $x = 0$ 时, $y = \frac{3}{2} - \frac{-n + \frac{3}{2}}{-m - 1}$,

所以 $N(0, \frac{3}{2} - \frac{-n + \frac{3}{2}}{-m - 1})$.

故 $\overrightarrow{GM} = (-t, \frac{n - \frac{3}{2}}{m - 1})$, $\overrightarrow{GN} = (-t, \frac{-n + \frac{3}{2}}{-m - 1})$

因为 $GM \perp GN$, 故 $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GN} = 0$, 即 $t^2 + \frac{4n^2 - 9}{4(m^2 - 1)} = 0$.

因为 $\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{3} = 1$, 故 $t^2 - \frac{3}{4} = 0$, 即 $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $G(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}), H(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$.

即以MN为直径的圆被直线 $y = \frac{3}{2}$ 截得的弦长是定值 $\sqrt{3}$.

运用向量解决圆锥曲线问题充分发挥了向量的工具作用, 在向量的教学中更要以这些例子为载体, 拓展学生在知识结构、应用能力和学习能力等方面的视野; 还要从向量的概念、运算本身的研究方法中获得其他知识, 如向量的模就是线段的长度, 由此推得平面上两点间的距离, 通过对共线向量的研究可以得到线段的比值, 而从向量间的垂直, 可以推得点到直线的距离公式等, 由此感悟用“数”的知识处理“形”的问题的一般方法和步骤, 培养学生研究问题的能力, 提高数学素养.

总之, 向量作为一种成熟的数学工具重新进入几何领域, 为我们解决几何问题提供了新的方法, 增加了新的视角, 因此, 把向量方法灵活运用到各数学知识中, 无疑是对学生创新思维的培养.

参考文献:

[1]于洋.深度探究问题, 发展运算素养——以一道圆锥曲线压轴题为例[J].中学数学月刊,2021(11):55-58.

[2]何业亮,贺小雪.一类圆锥曲线定值问题的研究[J].理科考试研究,2021,28(21):16-18.