整数分解式的指数函数及其均值的计算

李博
陕西铁路工程职业技术学院基础课部

[摘　要]本文给出了整数标准分解式的数论函数β(n,p)和它的均值$\sum_{n\le N}\beta(n,p)$的定义，推出了整数n标准分解式的指数函数计算公式和均值$\sum_{n\le N}\beta(n,p)$的精确计算公式。

[关键词]数论函数；均值；计算公式
【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2021.08.515

1 引言与主要结论

在[1]的第68个问题中，Professor F.Smarandach 要求我们研究一个数列，即p为一个素数，给一数列$k=e_p(n)$，k为n的标准分解式中的指数.本文给出了n的标准分解式中的指数数论函数β(n,p)的计算公式，推出了n进行标准分解的方法和均值$\sum_{n\le N}\beta(n,p)$的精确计算公式，并给予了证明.首先，引入如下定义。

定义　设p(p≥2)为给定的一个素数，n为任意正整数，$n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_t^{k_t}$（$p_i$为为素数），称β($n,p$)为$p$在$n$的标准分解式中的指数函数，它的值为$p$在$n$的标准分解式中的指数；

称$B(N,P)=\sum_{n\le N}\beta(n,p)$为函数β($n,p$)的均值.

本文以[x]表示不超过x的最大整数.

定理1 在n的标准分解式中质因数p（p≥2）的指数

$$\beta(n,p)=\sum_{i=1}^{[\log_p n]}\left(\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{n-1}{p^i}\right]\right)=\frac{1}{p-1}(1+a(n-1,p)-a(n,p)),$$

其中a(m,p)表示m在p进制表示中数字之和.

推论

$$n=\prod_{p\le n}p^{\sum_{i=1}^{[\log_p n]}\left(\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{n-1}{p^i}\right]\right)}=\prod_{p\le n}p^{\frac{1}{p-1}(1+a(n-1,p)-a(n,p))}$$

其中$\prod_{p\le n}$ 表示展布在不超过n的一切质因数上的积式.

定理2　设p(p≥2)为一个素数，N为一个确定的正整数，假定N在p进制中表示为

$N=a_1p+a_2p^2+\cdots+a_sp^s\ (0\le a_i<p;i=1,2\cdots,s)$. 则

$$B(N,p)=\sum_{n\le N}\beta(n,p)=\frac{1}{P-1}(N-a(N,p))$$
$$=\frac{1}{p-1}\left(N-\sum_{i=1}^{[\log_p N]}\left(\left[\frac{N}{p^i}\right]-\left[\frac{N}{p^{i+1}}\right]p\right)\right)$$

2 定理的证明

为了证明定理，首先引入下面引理.

引理1 设正整数n的p进制表示是：

$n=a_0+a_1p+\cdots+a_kp^k$，$0\le a_i<p,a_i$为正整数, $0\le i\le k$, 则

$$a_i=\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{n}{p^{i+1}}\right]p\ ,\qquad(1)$$

$$k=[\log_p n].\qquad(2)$$

$$a(n,p)=\sum_{i=1}^{k}a_i=\sum_{i=1}^{[\log_p n]}\left(\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{n}{p^{i+1}}\right]p\right)\qquad(3)$$

证明　因为

$$\left[\frac{n}{p^i}\right]=\left[\frac{a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_sp^s}{p^i}\right]=\sum_{j=i}^{s}a_jp^{j-i}\qquad(1\le i\le s)$$

$$\left[\frac{n}{p^{i+1}}\right]=\left[\frac{a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_sp^s}{p^{i+1}}\right]=\sum_{j=i+1}^{s}a_jp^{j-i-1}\quad(1\le i\le s-1)$$

所以 $\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{n}{p^{i+1}}\right]p=a_i$

$$n=a_0+a_1p+\cdots+a_kp^k=p^k\left(a_k+\frac{a_{k+1}}{p}+\frac{a_{k+2}}{p^2}+\cdots+\frac{a_0}{p^k}\right)$$

$$\log_p n=k+\log_p\left(a_k+\frac{a_{k+1}}{p}+\frac{a_{k+2}}{p^2}+\cdots+\frac{a_0}{p^k}\right)$$

因为　$\log_p\left(a_k+\frac{a_{k+1}}{p}+\frac{a_{k+2}}{p^2}+\cdots+\frac{a_0}{p^k}\right)<1$

所以　$[\log_p n]=k$

由（1）、（2）得

$$\sum_{i=0}^{k}a_i=\sum_{i=0}^{[\log_p n]}\left(\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{n}{p^{i+1}}\right]p\right)$$

引理2 设n为任意正整数，p为素数，$\alpha(n,p)$表示p在n!标准分解式中的指数，则

$$\alpha(n,p)\equiv\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]=\frac{1}{p-1}(n-a(n,p)),\qquad(4)$$

证明　$\left[\frac{n}{p^i}\right]=\left[\frac{a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_sp^s}{p^i}\right]$

$$=\begin{cases}\sum_{j=i}^{s}a_jp^{j-i} & 当1\le i\le s\\ 0 & 当i>s\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha(n,p) &\equiv \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right] = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_sp^s}{p^i}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{j} a_j p^{j-k} = \sum_{j=1}^{s} a_j(1+p+p^2+\cdots+p^{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{s} a_j \frac{p^j-1}{p-1} = \frac{1}{p-1}\sum_{j=1}^{s}(a_jp^j-a_j) = \frac{1}{p-1}(n-a(n,p))
\end{aligned}
$$

有了以上引理，我们容易给出定理的证明.

定理1的证明：

$$
\begin{aligned}
&n = \frac{n!}{(n-1)!} \\
&\beta(n,p) = \alpha(n,p) - \alpha(n-1,p)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

将（4）代入（5）得

$$
\beta(n,p) = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right] - \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{p^i}\right] = \sum_{i=}^{\infty}\left(\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{n-1}{p^i}\right]\right) \tag{6}
$$

因为$i > \lfloor \log_p n \rfloor$时$\left[\frac{n}{p^i}\right] = \left[\frac{n-1}{p^i}\right] = 0$

所以$\beta(n,p) = \sum_{i=1}^{[\log_p n]}\left(\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{n-1}{p^i}\right]\right)$

将（4）代入（6）得

$$
\begin{aligned}
\beta(n,p) &= \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right] - \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{p^i}\right] = \frac{1}{p-1}(n-a(n,p)) - \frac{1}{p-1}((n-1)-a(n-1,p)) \\
&= \frac{1}{p-1}(1+a(n-1,p)-a(n,p))
\end{aligned}
$$

于是定理1被证明.

定理2的证明：

由定理1得

$$
\begin{aligned}
B(N,p) &= \sum_{n\le N}\beta(n,p) = \sum_{n\le N}\frac{1}{p-1}(1+a(n-1,p)-a(n,p)) \\
&= \frac{1}{p-1}\sum_{n\le N}(1+a(n-1,p)-a(n,p)) = \frac{1}{p-1}\left(N+\sum_{n\le N}(a(n-1,p)-a(n,p))\right) \\
&= \frac{1}{p-1}(\mathrm{N}+a(0,p)-a(N,p)) = \frac{1}{p-1}(\mathrm{N}-a(N,p))
\end{aligned}
\tag{7}
$$

将（3）代入（7）可得

$$
B(N,p) = \frac{1}{p-1}\left(N - \sum_{i=1}^{[\log_p N]}\left(\left[\frac{N}{p^i}\right]-\left[\frac{N}{p^{i+1}}\right]p\right)\right)
$$

于是完成了定理2的证明.

参考文献

[1]F.Smarandache，only problem，not solutions. Xiquan Publ.House. Chicage，1993，54—55.

[2]R.Ayoub.Euler and the Zeta function[J].Amer，Math Monthly 1974（81）: 1067-1086.

[3]N.Y.zhang and K.S.Williaws.Some Series represeution of ζ(2n+1)[J].Rocky Mountain.J.Math

[4]Hailong Li, Number Theory and Special Functions[M]，Science Press，Beijing: 2011.

[5]Shigeru Kanemitsu and Haruo Tsukada，Vistas of Special Functions，World Scientific Publishing Co.Pte. Lid.2007.

[6]Vistas of special function Ⅱ Kalyan Chakraborty shigeru. Kanemitsu Jaruo Tsukada World Scienticic 2010.

作者简介:

李博（1991.09-）男，汉族，陕西渭南人，硕士，主要从事数论研究。