

基于核心素养下的高中立体几何教学

——一道立体几何题的探究与反思

林财福

厦门市新店中学

【摘要】立体几何是高中数学的重要内容，是发展和培养学生数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象和数学运算等数学核心素养的重要载体。本文从2021年厦门市高一下期末质检的一道立体几何试题入手，探究试题的背景，分析学生解题存在的典型错误，反思立体几何教与学存在的不足，提出改进教学的策略。

【关键词】立体几何；反思；核心素养；改进教学

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2021.09.1433

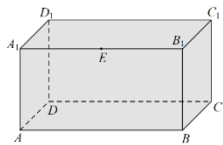
“立体几何”是高中数学的重要内容，是高考考查的重点，也是学生学习的难点。教师依据教材，运用直观感知、操作实践、思辨论证、度量计算四个认识立体图形的基本方法，循序渐进，以培养学生的直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养。然而，现实情况却十分严峻。多数学生连最基本的空间想象、作图识图、逻辑推理等能力都出现了不同程度的缺失，更别谈语言表达的合理性、推理论证的严谨性、数学运算的正确性。为什么会出现这样的偏差呢？许多学生在立体几何的学习中只是就题论题，对问题的理解只是停留在知识、方法的表面层次上，没有深刻体会试题背后的本质。因此，我们必须反思“立体几何”这一模块单元的教学现状，对课堂教学的目标进行重新定位，充分挖掘问题的本质，通过对教材中例题的讲解，让学生感知数学的学科价值，提升其数学素养。下面笔者通过对一道高一下期末市质检题及其背景的探究与剖析，就“如何处理教材中的例题与习题，才能有效提升学生的数学核心素养”与大家共同探讨。

一、试题呈现

题1（2021年厦门市高一下期末质检）如图，在长方体木料 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2AD=2AA_1=2$ ， E 为棱 A_1B_1 的中点，要过点 E 和棱 BC 将木料锯开。

(1) 在木料表面画出符合要求的线，写出作图过程并说明理由；

(2) 写出切割后体积较大的几何体的名称，并求出它的体积。



解析如下：

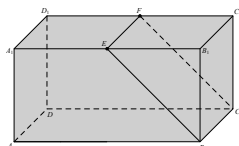
解：(1) 过点 E 作直线 $EF \parallel B_1C_1$ ，交 C_1D_1 于点 F ，连接 EB ， FC 。

法一：（存在性证明）因为 $EF \parallel B_1C_1 \parallel BC$ ， $B_1C_1 \perp BC$ ，所以 $EF \parallel BC$ ，

所以直线 EF 与 BC 确定一个平面 α ，

（唯一性证明）因为点 E 、 B 、 C 在平面 α 内且三点不共线，

所以过点 E 与棱 BC 的平面有且仅有一个，



所以所作截面是合理且唯一。

法二：点 E 、 B 、 C 确定一个平面，记为 α ，

因为 $B_1C_1 \parallel BC$ ， $B_1C_1 \not\subset \alpha$ ， $BC \subset \alpha$ ，

所以 $B_1C_1 \parallel \alpha$ 。

因为 $B_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1 ， $\alpha \cap$ 平面 $A_1C_1 = EF$ ，

所以 $B_1C_1 \parallel EF$ ，

所以所作截面是合理且唯一。

(2) 四棱柱：

法一：梯形 E_1A_1AB 的面积 $S_{\text{梯形}E_1A_1AB} = \frac{1}{2} \times (1+2) \times 1 = \frac{3}{2}$ ，

因为四棱柱 $E_1A_1AB-FD_1DC$ 是直四棱柱，

所以体积 $V = S_{\text{梯形}E_1A_1AB} h = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$ 。

法二：长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V_1 = 2$ ，

因为三棱柱 $E_1B_1B_1-FCC_1$ 是直三棱柱，

所以体积 $V_2 = S_{\triangle E_1B_1B_1} h = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$ ，

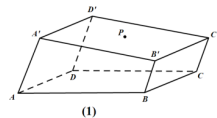
所以四棱柱 $E_1A_1AB-FD_1DC$ 的体积 $V = V_1 - V_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 。

二、试题探源

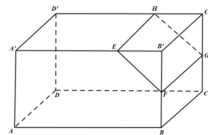
立体几何是高中数学的重要内容，是发展和培养学生数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象和数学运算等数学核心素养的重要载体。题1是2021年厦门市高一下期末质检的第18题，主要考查空间几何体结构特征、直线与直线的位置关系、直线与平面的位置关系、棱柱的体积等基本知识；考查空间想象、推理论证、运算求解等能力，考查化归转化与数形结合等数学思想。本题的第1问来源于高中数学人教A版第一册P138例3：如图8.5-10(1)所示的一块木料中，棱 BC 平行于面 $A'C'$ 。

(1) 要经过面 $A'C'$ 内的一点 P 和棱 BC 将木料锯开，在木料表面应该怎样画线？

(2) 所画的线与平面 AC 是什么位置关系？^[1]



第2问的第一个问题来源于课本P106第8题：如图，长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 被一个平面截成两个几何体，其中 $EH \parallel B'C'$ ， FG 请说出这两个几何体的名称。^[1]



三、学生答题情况分析

本题平均分5.73分，各分值人数如下：

第18题	改卷量	0分	1分	2分	3分	4分	5分	6分	7分	8分	9分	10分	11分	12分
卷数	41870	8907	932	2488	2085	2141	3319	3641	2962	3003	4170	3543	3554	2804

学生答题的典型错误如下:

第一问:(1)考生不能规范作图:①该用虚线的没用虚线;②画直线时徒手画,没有用尺子画;③很多考生用铅笔画,没有用黑色签字笔作图。(2)在写作图过程时,很多考生直接作 $EF//BC$,脱离了现实情境。(3)在说明理由的过程中,考生都只能写出存在性,并且多数同学只证到 $EF//BC$,没写出两平行直线确定一个平面,点 E 、 B 、 C 在这个平面内。第二问:(1)切割后较大的几何体名称大多数考生写棱台。(2)棱台的体积公式很多都误写为 $V = \frac{1}{2}(S_1+S_2)h$ 。

本题满分12分,题目的背景也是学生所熟悉的,但均分较低,从学生的解答情况上看,主要有以下一些问题:

①基础知识不扎实:学生对空间几何体的结构特征的基本概念不熟;对公理、定理及体积公式理解不到位。②缺乏空间想象力:空间想象能力不足,把空间问题看成平面问题,作图、识图存在困难。作图中不知何时该用实线,何时该用虚线。识图中相交、异面分不清,是否平行、垂直分不清。③缺乏逻辑思维能力:学生在立体几何证明的过程中,常常出现因逻辑思维能力差而导致的证题思路上的错误。题1唯一性的证明大部分同学都没写,这是不够严谨的,因为两条平行直线 EF 、 BC 构成的集合与 E 、 B 、 C 这三点构成的集合是不等价的,所以不能由前者有且仅有一个平面推出后者亦是如此,在证明存在性以后要求学生进一步思考除了这个平面外,还有没有其它平面也过这三点,学生必须应用公理:“过不在同一条直线的三点确定一个平面。”这三点又都在 α 内,所以是唯一的。

四、教学反思与改进

表面上看是很基础的一道立体几何题,但从阅卷数据看,学生完成得并不理想。立体几何是研究现实世界中物体的形状、大小与位置关系的数学分支。通过对实物模型的直观感知和操作,我们认识了空间几何体的结构特征,进一步掌握了在平面上表示空间图形的方法,了解了它们的表面积和体积的计算方法。通过对图形的直观感知,我们认识了刻画平面性质的三个基本事实。空间图形问题经常转化为平面图形问题,这是解决空间图形问题的重要思想方法。在研究平面基本性质的基础上,认识了空间点、直线、平面的位置关系,重点研究了直线、平面的平行和垂直这两种特殊的位置关系。教材在这一章节的设置上,充分诠释了课标所提出的“三会”内容:“会用数学的眼光观察世界,会用数学思维思考世界,会用数学语言表达世界。”^[2]从学生答题的情况上看,学生在这三个方面还存在着较大的漏洞,我们必须深刻反思。教材是教师教学的依据,是学生学习的载体,是最权威、最经典的示范性文本。教师要重视教材,结合考纲,对教材中所给的例题和习题进行深入探究,并对其进行归纳和拓展,挖掘其蕴含的价值,实现教材功能的最大化。

(一)加强学生的识图、作图能力教学,培养学生直观想象素养

几何的学习离不开图形,许多学生在某些立体图形的认识和理解上存在困难,加强学生识图的能力尤为重要^[2]。教师要引导学生看、会画、会用图形。那么如何培养学生的识图能力?首先要让学生掌握最基本的图形的概念及其性质,了解空间几何体的直观图。通过让学生观察实物与对应直观图的图形特征,帮助学生形成空间立体感,进而提高空间想象能力。如课本P106第8题,很多同学存在思维定势,总是以为底下的那个面就是几何体的底面,因此就说不出来是什么几何体,我们只有通过不同视角去观察才能发现它是棱柱。事实上,我们的教材的课后习题出现过几道这样的题目。其次,在教学时应多使用教具,增强学生的空间想象能力,也可利用Geogebra软件的3D功能进行辅助教学,增强教学的可视化,从而突破教学难点,提升学生的空间想象能力。会作图是学好立体几何的关键,作图过程中可以培养学生的空间想象力。教师在平时的教学中应做好示范。考试碰到作图题时,可让学生先用铅笔画

好,再用黑色签字笔描上去。从题1的得分数据看,0分的比重还是比较大的,说明学生的作图识图还比较欠缺。教材P138例3的第一问就是作图,教师应先为学生提供一个真实的情境,课本所给的图已经是木料抽象出的几何体,教师在教学中可以通过事物展示或利用Geogebra软件展示真实的教学情境,再提出问题,让学生经历整个抽象过程。有了实物的展示,学生就不至于过 P 点直接去作和 BC 平行的直线。教师在作图过程中一定要做好示范,并让学生经历作图的整个过程,提高学生的作图能力。课堂上教师一定要舍得把时间还给学生,让学生动手操作实践,从而提升学生的数学素养。

(二)设计问题串,培养逻辑推理素养

数学推理包括逻辑推理和合情推理,新课程的理念是:改变那种过分重视逻辑推理而忽视合情推理的现状,因而确立了“数学要讲推理,更要讲道理”的出发点。把说理和推理能力的培养融合在课堂教学中,使学生经历观察、操作、试验、猜想、推理等数学活动过程。^[3]要推理首先要先知理,立体几何定理公理比较多,容易混淆,尤其是平行与垂直的判定定理和性质定理,学完定理以后一定要及时进行归纳,还要注意定理中图形语言、文字语言、符号语言三者之间的转化。例如:教材P138例3第二问的教学,学生通过直观感知,知道所画的线与平面 AC 的位置关系是平行后,教师可以引导学生复习立体几何中与平行相关的定理,进一步追问学生下面3个问题:①如何证明 $BC//B'C'$?②如何证明 $EF//BC$,③如何证明 $EF//$ 面 AC 。这样化繁为简,逐步深入,一步一步地向目标靠近。教学中,应多给学生说理的机会,并引导学生三种语言之间的转化,让学生体验探索、推断的生成过程,提升学生的推理能力。

(三)强化数学运算教学,培养数学运算素养

立体几何学习中的一个重要环节是度量计算,度量的量主要有:距离、角度、面积、体积。应让学生熟练掌握对应的公式,明白公式的推导过程和公式间的区别与联系。

如:在记柱锥台的体积公式时,要结合三种几何体之间图形的联系,体会公式之间的差别。

把柱体的上底缩小就变成台体,当上底缩小到一点时,就变成锥体,我们只要记住台体的体积公式,就能够准确地得到柱体和锥体的体积公式。坐标法是解决立体几何中求距离、角度的常用方法,对学生的计算能力要求也比较高。通过数形结合可以帮助学生更好的记忆公式,通过系统的训练提高学生计算的准确性,从而提升学生的运算能力。

(四)注重信息技术应用,提高课堂教学效率

课标指出:“注重信息技术与数学课程的融合,提高教学的时效性。”^[3]Geogebra软件强大的3D功能在立体几何的教学中,发挥着极其重要的作用。例如,题1第(2)问的第一个问题我们可以这样讲解:我们先让认为是棱台的同学延长侧棱,发现侧棱延长后并不会交于一点,根据棱台的定义该几何体一定不是棱台,提示学生换个角度观察,不少学生在老师提示后能说出是四棱柱,最后,利用Geogebra软件进行动态展示。我们可以在Geogebra软件的3D界面把切割后的两块几何体分离,然后转动较大的几何体,使面对着我们的侧面朝下,这样学生就不难发现该几何体是四棱柱。又如,课本P116练习第2题:如图是一个表面被涂上红色的棱长为4cm的立方体,将其适当分割成棱长为1cm的小立方体。

(1)共得到多少个棱长是1cm的小立方体?

(2)三面是红色的小立方体有多少个?它们的表面积之和是多少?

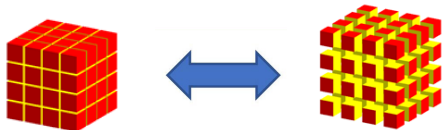
(3)两面是红色的小立方体有多少个?它们的表面积之和是多少?

(4)一面是红色的小立方体有多少个?它们的表面积之和是多少?

(5)六个面均没有颜色的小立方体有多少个?它们的表面积之和是多少?它们占有多少立方厘米的空间?^[1]

本题主要考查学生的空间想象能力,在讲解时,教师可以

利用Geogebra软件进行辅助教学,通过滑动条,可以控制切割后的小立方体的离散程度,这样就能够清楚的看到所有小立方体各个面的涂色情况,从而突破本题的难点,提高课堂教学的时效性.信息技术在立体几何的研究中具有重要作用,有利于培养学生的直观想象素养.



(1)

(2)

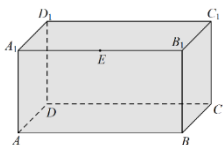
(五) 加强变式训练,做好结构化教学,提升学生学科核心素养

著名数学教育家波利亚说过:“在你找到第一个蘑菇(或做出第一个发现)后,要环顾四周,因为它们总是成堆成长的。”^[4]我们在讲完题1后,要对该题进行研究拓展并归纳,逐步探究问题的本质,并对该问题的本质认识提升到一个新的高度,从而提高学生解决问题的能力.对题1,可以作如下变式:

变式1:如图,在长方体木块 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2AD=2AA_1=2$, E 为棱 A_1B_1 的中点,平面 α 过点 E 且与棱 B_1C_1 平行.

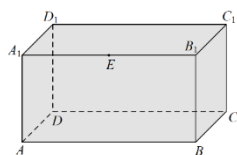
(1) 当平面 α 截长方体木块 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面面积最大时,作出此截面;

(2) 在(1)的条件下,求以 B_1 为顶点截面为底面的几何体的体积.



变式2:如图,在长方体木块 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2AD=2AA_1=2$, E 为棱 A_1B_1 的中点.

- (1) 在平面 A_1C_1 内作直线 l , 使得 $l \perp CE$, 并说明理由;
- (2) 在(1)的条件下,求二面角 $C-l-C_1$ 的余弦值.



通过对试题变式的探究,使学生在探究活动中得到数学知识与技能,收获数学经验与方法,同时在问题的解决中巩固和发展四基,提升学生的运算能力和推理能力.

五、结束语

总之,教材是教师进行课堂教学的载体,是学生学习数学知识的范本,同时也是命题的重要依据.所以,教师的一切教学活动都必须立足于教材,领会教材编写理念,熟悉教材知识内容编排,例、习题设置,深入探究例题与习题背后隐藏的教学资源,在深入领会编者意图的基础上,充分挖掘教材的学科育人价值,科学设计课堂教学活动,从而发展学生的数学核心素养,落实“立德树人”的根本任务.

参考文献:

- [1] 人民教育出版社课程教材研究中心. 数学A版 必修第二册 [M]. 北京: 人民教育出版社, 2019
- [2] 章建跃. 核心素养立意的高中数学课程教材教法研究 [M]. 上海: 华东师大出版社, 2021.
- [3] 中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准(2017年版) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [4] 波利亚. 怎样解题 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

(上接第2747页)

例如:教学《观潮》这一课文内容的过程中,教学环节教师应避免以直接内容讲授为主,应带领学生共同阅读、朗读文章内容,同时引导学生注重情感的融入,让学生通过阅读把文中表达的钱塘江壮丽景象充分描绘出来,借此促使学生借助阅读和情感的融入,对钱塘江壮观景象进行感受,使学生对祖国大好河山的热爱之情有效激活,让学生阅读的动力进一步调动,此时教师就可抓住时机,引导学生把自身阅读过程的感受积极记录下来,实现读后感写作目的的同时,推动学生进一步投入到文章阅读中,对其内作者表达的情感进行进一步挖掘和体会,在此基础上写作并丰富自身读后感内容,有效提升学生阅读能力、理解能力的同时,也能帮助学生语言表达及组织能力有效提高^[7-8].

结束语:

作为小学语文教学重要组成内容的阅读,与学生学习成绩具有直接关系,同时立足长远目标来看,也会影响学生后续语文及其他学科知识学习.对此,小学语文教师应高度重视阅读教学,跟随新课标要求不断优化和创新阅读教学,着重培养学生阅读兴趣及阅读能力,使学生爱上阅读的同时,让学生在阅读学习中积极主动地参与,逐步推动小学语文教学价值的最大

化发挥,为学生语文素养的综合发展奠定基础.

参考文献:

- [1] 薛玮. 浅析在小学语文教学中培养小学生阅读兴趣的有效策略 [J]. 散文百家(新语活页), 2020(09): 81-82.
- [2] 陈艳. 小学语文教学中小学生课堂阅读能力的培养分析 [J]. 智力, 2020(16): 86-87.
- [3] 陈秀红. 小学语文教学中如何培养学生的阅读能力探究 [J]. 新课程(上), 2019(10): 208-209.
- [4] 张燕萍, 艾永文. 浅谈小学语文教学中如何培养学生的阅读能力 [J]. 新课程(中), 2019(09): 164-165.
- [5] 石素珍. 小学语文课教学中着重培养小学生阅读能力的策略探寻 [J]. 新课程(中), 2019(08): 165-167.
- [6] 李超, 郑志兴. 谈如何在语文教学中培养小学生的阅读能力 [J]. 中华活页文选(教师版), 2020(14): 6-7.
- [7] 雷明旭. 语文教学中如何培养小学生的阅读感悟能力 [J]. 语文课内外, 2018(27): 107.
- [8] 郑志兴, 董翻领. 语文教学中如何培养小学生的阅读能力 [J]. 人文之友, 2020, (17): 379.