

从波利亚思想中探讨对初中生“四能”的培养方法

曾敏

(重庆师范大学)

[摘要] 随着时代进步,在学生能力培养上出现了新思路,基于我国数学教学方式的变化,跟随时代发展的脚步,结合波利亚的教育思想,以多面体的探究过程为例进行研究。^[1]获取关于归纳推理的一些知识。从提出猜想,检验猜想(证明与推翻),检验新猜想以及总结与启示四个方面进行研究,给教师在数学课堂上提供一些教学策略:(1)通过创设合适的情境吸引学生的学习兴趣。(2)通过设置问题串培养学生的探究精神。(3)发展学生数学建模的素养,从而更好地发现问题,提出问题。

[关键词] 四能;波利亚;数学情境

[DOI] 10.12252/j.issn.2096-627X.2021.09.132

一、研究背景

(一) 合情推理与演绎推理

推理包含合情推理与演绎推理。通过合情推理我们可以得到新的结论。但是合情推理的结论可能是正确的,也可能是错误的,还需要依靠演绎推理去证明或者证否。

观察和实验往往是一般的自然科学的第一步,在“猜想”的过程中我们的数学思维得到了训练,在一次又一次的尝试中,我们终会走向成功。这个过程对于我们培养创新型人才往往是至关重要且不能缺少的。

(二) 时代对学生能力发展提出新要求

学校和教师将学生的个性发展放在了更加重要的位置,在此基础上,对学生的能力也有着更加严格的要求。“四能”就是指发现和提出问题的能力,分析和解决问题的能力,教师往往对于学生分析问题和解决问题的能力更加看重,学生缺乏主动去学习的兴趣和动力,只能被动的接受老师要求掌握的知识,进一步来说就是缺乏学习的动力。只拥有解决问题的能力还不够,在现实生活中拥有一双发现问题的眼睛,提出问题的头脑,显得更为可贵,这也是时代对于创新型人才的基本要求。

针对这样的现状,结合波利亚的教学思想,希望探讨出对于学生学习有利的教学策略,从而对于提高学生发现问题,提出问题的能力有所帮助。

在波利亚的观念里面,他认为教师在课堂教学中所能给予学生的东西是有限的,打一个比方,教师起着助产士的作用,这就说明教师在教学过程中应当把精力更多的放在引导学生自己去发现问题,提出问题上面;^[2]通过各种途径去提升学生主动学习的兴趣和动力。波利亚的观点是,学生如果要提出一个问题,那么这个学生一定要对生活中的事物充满洞察力与好奇心,并且足够熟悉这个事物,同时,也应当具备一定的创造力与创新的能力,以上提到的这些都是一项发现的重要因素,在学生能够主动提出问题的条件下,他们就会尽其所能的解决问题,因为这个问题是他们自己提出的,从而他们也有着想要得到答案的欲望。教师的作用所在就是去激发起学生的好奇心与求知欲,以上就是我们常常提到的主动性原则。但是另一个角度来说,波利亚认为仅有这些还不够,学生如果缺乏活动的动力,即使有了求知欲也不会有所行动。在波利亚的观念中,学习的内容一定要足够吸引学生,也就是学生一定要对所学内容有兴趣,因为感兴趣去学习知识,并且经过学习收获了知识,从而体验到一种满足感。

二、研究问题

这里要研究的是波利亚《数学与猜想》第一卷——数学中的归纳与类比中的第三章的内容立体几何中的归纳推理,这一章主要从立体几何的两个例子说明,主要研究的是第一个例子,多面体。进行一个简要分析。通过这个例子,获取关于归纳推理的一些知识。

三、研究方法

(一) 文献法

通过大量文献的阅读,详细了解对于波利亚思想的已有研究,尤其是有关归纳与类比的研究现状。

(二) 分析法

通过研究,总结出有关学生学习数学的看法与建议,以期在今后课程改革与学生学习数学提供一些参考。

四、研究内容

(一) 提出猜想

我们想要了解多面体的一些性质。开始会提出一个含糊的叙述:“一个结构复杂的多面体有许多面,角和棱。”为了深挖这句话的意义,我们需要在这句话的基础之上寻求一些更为精准确定的知识。为了获取这些知识,我们正确的做法应当是:

1. 识别多面体中包含的量:面Face,顶点Vertex以及棱Edge。

2. 提出一些明确的问题:

问题一:面的数目F是否都随顶点数目V的增大而增大?

为了解决这个问题,我们首先考虑特殊多面体,分别从棱柱,棱锥以及组合体三个角度,列举出9种情况。

得到这样一种表格。从这张表中,我们可以看到,立方体和八面体,F增大的同时,V却在减小,于是这条规律并不成立。

问题二:棱的数目E是否随面的数目F或顶点的数目V的增大而增大?

我们将上表按照棱的数目E的增大次序重新编排。

可以看到,表中八面体和五棱柱F减小时,E在增大,截角立方体和“塔顶”体,V在减小时,E在增大,于是规律不成立。

通过问题一与二都未找出规律,但我们不甘心承认原来的想法完全错了。通过观察,修改原来的想法:F和V随E“联合”增大且满足关系式 $F+V=E+2$ 。

(二) 检验猜想

首先考察正多面体，在前面，我们已经验证了正方体，四面体和八面体。

在此基础上加入正二十面体和正十二面体的情形。

通过表格可以看出满足关系式 $F+V=E+2$ 。

接着考察更一般的情形，所有的棱柱和棱锥，也满足 $F+V=E+2$ 。

在此基础上，作更深入的推广，即多面体和棱锥组合的情况。我们分为塔顶体，即棱柱和棱锥的组合，以及截角立方体，假设所选面有 n 条边，得到下表，通过推导可以发现都满足 $F+V=E+2$ 。

上述部分我们都在证明猜想是正确的，但是自然科学家与一般人的区别就在于自然科学家希望通过最富有威胁性的检验，即推翻猜想，给予这个猜想最广泛的承认和最有力的检验性证明。

我们考察一种很不同的情形，镶嵌画的框架状多面体，如图，将三角形杆截成4段，装配成框架状多面体，我们会发现 $F+V=E+2$ ，而 $E+2=26$ ， $F+V \neq E+2$ 。

（三）检验新猜想

从类比当中寻找新证据，将平面上的多边形与空间中的多面体放在一起，进行类比，寻求相同点与不同点。平面上多边形的顶点数目与边数相同，即 $V=E$ ，而空间中我们的猜想是 $F+V=E+2$ 。由于在第二章中我们知道，如果两个系统在各自的部分之间，在其可以定义的一些关系上一致的话，那么这两个系统可以进行类比。那么我们对这两个公式进行一个变形得到以下两个公式，我们找一找这两个公式中的一些一致性，首先，“+”“-”交错，其次，维数是按照自然顺序所排列的，顶点 V 是0维，边或棱是一维，面是二维，而一代表多面体或多边形，分别是三位和二维。从类比中，我们增加了猜想是正确的信心。

（四）总结与启示

三点启示：1. 培养学生归纳的态度：理智上的勇气，理智上的诚实，明智的克制。2. 通过各种方式给予学生鼓励，使他们能够自如的提出问题，同时也提升数学建模的素养水平。3. 教会学生善用类比提出猜想。

波利亚在本书中提到了归纳法，他认为运用归纳法时一般是从观察一事物开始做起，并且波利亚认为如果要去观察某一事物，那么就应当对这件事物熟悉且感兴趣。这也就对教师教学提出了要求，学生原本就对客观世界的事物充满着好奇心，我们作为教师的职责之一就是让学生感知到学习数学是有用的，即了解到数学的价值所在，为了达到这一目的，我们在教学过程中不仅要教会学生基本的知识，还应当教会学生如何应用这些知识去解决生活中的问题，即教会学生如何将数学与工程技术相联系，如何与其他学科相联系，如何与实践相联系。学生在了解完数学在这些领域中的应用情况后，必然会对之前完全是公式符号的数学产生新的认识，新的兴趣。对一事情有了兴趣，会激发起学生的好奇心与求知欲，从而提高学生的学习效率与学习效果。因而，这就给了我们一些启发，在教学过程中，我们应当为学生的数学学习创设一些情境，这

些情境可以是生活中的情境，也可以是其他学科的情境，当然也可以是数学本身的情境，通过这些情境的创设，引导学生用数学的眼光看待世界，达到提升学生能力的目标。当然，善于思维才能够发现问题和解决问题，^[3]这也是我们需要去培养学生达到的。

在探究多面体性质的过程中，我们可以发现波利亚首先提出一个模糊的问题，然后逐步精细化，接着运用归纳法去证明自己的猜想，之后又推翻它，直至提出新猜想。从这一系列的操作中，我们可以总结出一个数学的发现并不是某一个瞬间的灵光乍现，而是经历了一步一步的修正才得出的，这个过程是非常的漫长且不易的，有时甚至需要几代人的不懈努力，要让学生明白数学知识的发现并不是一蹴而就。当然，我们同样也明白了一个数学发现的提出也没有想象中那么遥不可及，作为学生，也是可以从一个简单的念头开始，从而开始自己的探索之路的。对此，教师需要对学生加以引导，设置问题串就是一个很好的方式。通过问题串的设置，学生在数学学习过程中有了学习兴趣，他们才会自动自发地学习，而好奇心和求知欲正是发展学生数学学习兴趣的前提所在，其次，通过精心设置的问题，一步一步引导学生向着正确的轨道作答，从而体会成功的乐趣，有了这一体验，学生对学习数学会更有动力。^[4]

最后，我们可以发现在波利亚提出的多面体的例子中，从一个含糊的话语到后面严格的公理化表述，体现了数学建模的素养，这也是需要学生达到的。模型思想是《义务教育数学课程标准（2011年版）》当中新增的一个核心概念，它也是数学的基本思想之一，我们作为教师应当带领学生去感悟这一基本的数学思想，从而使学生形成正确的数学态度。让学生体会和理解数学与我们所生活的世界的关联是模型思想的本质所在。

结语

通过对多面体这个例子的研究提出一些建议，第一点，提出猜想时我们是基于对一件事物的兴趣和熟悉程度提出一个含糊的叙述。进而在此基础上再去探求一些更为精确的知识。即将具体要研究的量用数学符号表示出来，并且提出一些明确的问题。第二点，检验猜想时，我们可以分为证明猜想与推翻猜想两个部分。对于证明猜想，我们是将各种例子一步一步推广，通过归纳的方法，去增加这个猜想是正确的信心。第三点，对于猜想的检验，我们可以从类比中寻找新证据。第四点，对归纳过程进行一个总结，归纳是思想和语言上的适应。将思想认识适应于事实结果。用合适的语言表达事实。

参考文献

- [1] G. 波利亚. 数学与猜想——数学中的归纳和类比[M]. 科学出版社, 2001.
- [2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准（2011年版）[M]. 北京师范大学出版社, 2011.
- [3] 何云. 浅谈学生数学“四能”的培养策略[J]. 数学教学通讯, 2020（4）: 34-35.
- [4] 吴兴东. 初中数学教学中四能问题的探讨[J]. 教育参考, 2019（41）: 86-87.