基于数学运算核心素养下的解题分析

——以一道解析几何为例分析

林永忠

福建省莆田第四中学

[摘　要]本文就解析几何运算难的问题进行剖析，通过巧设直线、巧用对称性、巧用同理可得、对称化构造、如何简化运算过程等达成运算目标进行分析，从而简化圆锥曲线的运算过程. 同时就如何在课堂教学中落实数学运算核心素养的培育进行分析.

[关键词]数学运算；运算算理；运算目标

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2021.09.359

普通高中数学课程标准中提到：数学运算是指在明晰运算对象的基础上，依据运算法则解决数学问题的过程. 主要包括：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算方向，选择运算方法，设计运算程序，求得运算结果等.

数学运算作为数学学科六大核心素养之一，如何培育并落地生根，须在平时的课堂教学过程中落实. 而如何落实老师又比较困惑，或者说实施起来效果不是那么理想. 而在高中数学中，学生普遍对解析几何的运算过程比较茫然，很多同学明明知道解题思路，就是无法达成运算目标，造成丢分. 下面就以解析几何的一道例题阐述在培育数学运算核心素养过程中的几点思考和作法。

引例：已知F_1,F_2为椭圆E：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的左右焦点，O为坐标原点.

（1）过左焦点的直线l与椭圆E交于A、B两点，求ΔAOB面积的最大值；

（2）过左焦点F_1作两条互相垂直的直线与E交于四个点，求这四个点构成的四边形面积的取

值范围；

（3）四边形$PQNM$的顶点在E上，且对角线PN、QM过原点O，设$P(x_1,y_1)$ $Q(x_2,y_2)$，

满足$4y_1y_2=x_1x_2$.

①求证$k_{PQ}+k_{MQ}$为定值，并求出定值；

②试求四边形PQNM面积的最大值.

（1）分析：关于三角形面积（度量）范围最值问题，应把三角形面积（目标）用一个变量（引参）表示出来，再结合函数或基本不等式进行求解；下面给出两种设直线的方法进行对比说明设直线对解题过程的影响.

方法一：

Step1：设直线l的方程为$x=my-\sqrt{3}$，

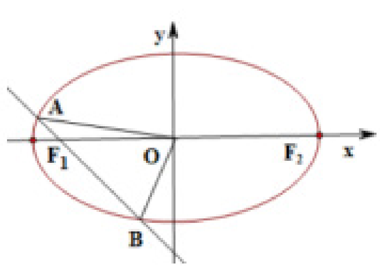
备注1：为什么这么设直线？好处是什么？斜率为0的直线不合题意，而且可以表示斜率不存在的直线；另外，ΔAOB面积可以一分为二，并用A、B的纵坐标表示（消元时考虑消去x）.

Step2：联立$\begin{cases}x^2+4y^2-4=0\\x=my-\sqrt{3}\end{cases}$，消去$x$得$(m^2+4)y^2-2\sqrt{3}my-1=0$，$\Delta=16(m^2+1)$，

Step3：$S_{\Delta AOB}=S_{\Delta OAF_1}+S_{\Delta OBF_1}=\frac{1}{2}|OF_1||y_1-y_2|=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{\Delta}}{|a'|}=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+4}\le 1$.

方法二：

Step1：设直线l的方程为$y=k(x+\sqrt{3})$，



备注2：这样设直线有什么弊端？直线不表示表示斜率不存在的直线，对斜率不存在的情况要单独讨论；另外，ΔAOB面积一分为二表示时须进一步转化.

Step2：联立$\begin{cases}x^2+4y^2-4=0\\y=k(x+\sqrt{3})\end{cases}$，消去$y$得得$(4k^2+1)x^2-8\sqrt{3}k^2x+12k^2-4=0$，$\Delta=16(k^2+1)$，

Step3：$S_{\Delta AOB}=S_{\Delta OAF_1}+S_{\Delta OBF_1}=\frac{1}{2}|OF_1||y_1-y_2|=|\frac{1}{2}k(x_1-x_2)|=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{|k|\sqrt{\Delta}}{|a'|}$

$$=\frac{2\sqrt{3}|k|\sqrt{k^2+1}}{4k^2+1}=\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}{4+\frac{1}{k^2}}\le 1.$$

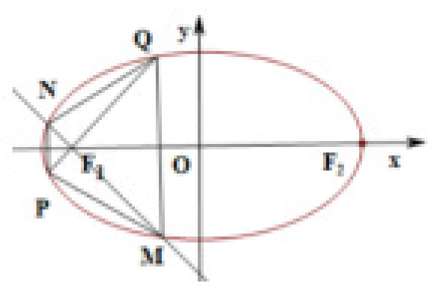
备注3：对比以上两种直线方程的设法，显然方法二的解题过程比较繁琐，所以解题时怎么设直线方程是有讲究的. 当然在设直线方程时既要考虑消去哪个变量，又要考虑待求的目标函数用那哪个变量表示. 比如要消去x，可设直线为$x=ty+n$，要消去y，可设直线为$y=kx+m$.

（2）分析对角线互相垂直的四边形的面积等于对角线积的一半，目标是弦长$|MN|$和$|PQ|$用同一个变量表示，隐含斜率的积为定值，故可以相互转化，但要对与坐标轴平行（或）垂直的直线另行讨论.

Step1：设直线PQ：$x=my-\sqrt{3}$，联立$\begin{cases}x=my-\sqrt{3}\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$，

消去x得$(m^2+4)y^2-2\sqrt{3}my-1=0$，且$\Delta=16(m^2+1)$，

$|PQ|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|=\frac{4(m^2+1)}{m^2+4}$，



备注1：对于$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{(-\frac{b'}{a'})^2-\frac{4a'c'}{a'^2}}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a'|}$，实际上是韦达定理的应用，书写时可以进行简化计算，减少运算.

Step2：同理$|MN|=\sqrt{1+(-\frac{1}{m})^2}|y_1-y_2|=\frac{4[(-\frac{1}{m})^2+1)]}{(-\frac{1}{m})^2+4}=\frac{4(m^2+1)}{4m^2+1}$，

备注2：在求$|MN|$的过程中，注意到直线MN与直线PQ只是斜率在改变，所以可以同理可得.

备注3：这里能否把直线设成参数方程的形式？再把弦长表示出来.

Step3：$S=\frac{1}{2}|PQ|\cdot|MN|=8\frac{(m^2+1)(m^2+1)}{(m^2+4)(4m^2+1)}$，设$m^2+1=t\ge 1$，

备注4：换元之后，注意新元范围！分子分母都是四次，怎么处理？

备注5：是否注意到分子，分母之间的关系，可用基本不等式求其最小值.

$$S=8\frac{(m^2+1)(m^2+1)}{(m^2+4)(4m^2+1)}\geq 8\frac{(m^2+1)^2}{[\frac{(m^2+4)+(4m^2+1)}{2}]^2}=8\times\frac{4}{25}=\frac{32}{25}.$$

Step4：则$S(t)=\frac{8t^2}{(t+3)(4t-3)}=\frac{8t^2}{4t^2+9t-9}=\frac{8}{-\frac{9}{t^2}+\frac{9}{t}+4}(\frac{1}{t}\in(0,1])$，

当$t=2$时，$S_{\min}=\frac{32}{25}$；当$t=1$时，$S_{\max}=2$；所以$S\in[\frac{32}{25},2]$.

备注6：注意到$\frac{1}{|PQ|}+\frac{1}{|MN|}=\frac{m^2+4}{4(m^2+1)}+\frac{4m^2+1}{4(m^2+1)}=\frac{2-e^2}{2ep}$（定值，可推广）！

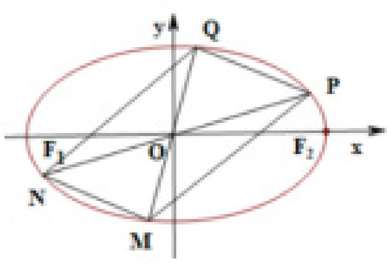
即：过焦点作互相垂直的两条弦，它们的倒数和为定值$\frac{2-e^2}{2ep}$，进一步，过长轴（除顶点外）上的定点作互相垂直的两条弦，它们的倒数和为定值，还可推广到双曲线、抛物线！在抛物线中，$\frac{1}{|PQ|}+\frac{1}{|MN|}=\frac{1}{2p}$（$p$为焦准距）. 由此结论，结合基本不等式可求该四边形面积的最小值. 如：，则.

备注7：在圆锥曲线中，很多结论可以进一步探究和推广，还有较多的二级结论，适当了解和记忆相关结论，对选择填空的求解往往能起到事半功倍的效果.

（3）分析：①四边形$PQNM$的对角线PN、MQ过原点O，直线过原点，怎么处理？②条件$4y_1y_2=x_1x_2$怎么用？隐含怎么？③k_{PQ}/k_{MQ}怎么表示？涉及如何设直线？④四边形$PQNM$面积的表达式要怎么表示出来？

Step1：不妨设$x_1>0,x_2>0$，则$k_{PQ}<0$，设直线PQ：$y=kx+m(m\neq 0)$，

备注1：当直线没有明确的相关属性时，可设成$y=kx+m$的形式，当大多数是同学害怕变量太多不敢下手，实际上是无法寻找出已知条件中的隐含关系.



Step2:联立$\begin{cases}x^2+4y^2-4=0\\y=kx+m\end{cases}$，消去$y$得$(4k^2+1)x^2+8mkx+4m^2-4=0$，…………………①

$x_1+x_2=-\frac{8mk}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}$，$\Delta=16(4k^2+m^2-1)>0$；…………………②

备注2：利用设而不求求解圆锥曲线相关问题时，其关键是把相关的几何元素代数化，即用坐标表示，即在化简的过程中转化为两根和、两根积的关系，而且两个的系数不同时，还要利用对称化进行构造，所以写出两根和、两根积、判别式是解题的必要步骤，也是得分点.

Step3：由$4y_1y_2=x_1x_2$，可得$4(kx_1+m)(kx_2+m)=x_1x_2$，即$(4k^2-1)x_1x_2+4mkx_1x_2+4m^2=0$••••••③

备注3：在化简的过程中，目标是往两根和、两根积转化，不要急于把两根和、两根积的表达式代入，应利用点在直线（或曲线上）消元之后再代入.

Step4：把两根和、两根积代入可得：$(4k^2-1)(m^2-1)-8m^2k^2+m^2(4k^2+1)=0$，•••••••••••••••④

备注4：这里的多项式运算有一定的技巧和算理。学生大多是先展开，再合并同类项得到关系式. 实际上，应该遵循从高次到低次的运算过程，简单且不容易出错！如：最高次四次项m^2k^2的系数为0，三次项的系数也是0，二次项m^2的系数也是0，二次项k^2的系数是-4，一次项的系数为0，常数项为1. 则有

Step5：$4k^2-1=0$，则$k_{PQ}=-\frac{1}{2}$（根据题设排除正根），••••••••••••••••••••••••••••⑤

备注5：根据$4y_1y_2=x_1x_2$，得$k_{OP}\cdot k_{OQ}=\frac{1}{4}$，隐含直线$PQ$的斜率为定值，所以本小题改为求证直线$PQ$的斜率为定值，就直接多了！实际上当两直线的斜率和（或积）存在某种定量关系时，往往隐含另一个定量关系，需要进一步挖掘.

Step6：注意到$k_{PQ}\cdot k_{MP}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{4}$（证明略），则$k_{MP}=\frac{1}{2}$，所以$k_{PQ}+k_{MP}=0$. ••••••⑥

备注6：注意到Q、M是关于原点对称的两点，则有$k_{PQ}\cdot k_{MP}=-\frac{b^2}{a^2}$（斜率存在的情况），这是圆锥曲线的第三定义，在相关的模拟考试中经常隐含在题目中.

备注7：注意到直线PN、MQ过原点O这一特殊情况，考虑到交点坐标比较容易表示，可以直接求出交点坐标，在代入求解。实际上，设直线的目的也是为了交点坐标，只不过交点坐标不好求，从而通过两根和、两根积来转化而已. 另解如下：

Step7：因为$4y_1y_2=x_1x_2$，可得$k_{OP}\cdot k_{OQ}=\frac{1}{4}$，记$k_{OP}=k,k_{OQ}=k'=\frac{1}{4k}$，

设直线NP：$y=kx$，联立$x^2+4y^2=4$，解得：

$\begin{cases}x_1=\frac{2}{\sqrt{4k^2+1}}\\y_1=\frac{2k}{\sqrt{4k^2+1}}\end{cases}$，同理$\begin{cases}x_2=\frac{4k}{\sqrt{4k^2+1}}\\y_2=\frac{1}{\sqrt{4k^2+1}}\end{cases}$，

所以$k_{PQ}+k_{MP}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}+\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{2k-1}{2-4k}+\frac{2k+1}{4k+2}=0.$

备注8：对比两种解法，过原点的直线，可以巧求点的坐标，有时更直接。另外消元时大多利用点在线上消元，但碰到抛物线时，利用点在抛物线上消元有时更容易些.

Step8：注意到四边形是平行四边形，$S_{四边形PQNM}=4S_{\Delta OPQ}$，

备注9：注意到平行四边形是中心对称图形，所以$S_{四边形PQNM}=4S_{\Delta OPQ}$，这是很重要的一个的几何性质，解题时若能挖掘隐含的几何性质，再利用几何性质解题就会减少很多不必要的运算.

Step8：由上知，$k_{PQ}=-\frac{1}{2}$，设直线PQ：$y=-\frac{1}{2}x+m$，联立$\begin{cases}2y=2m-x\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$

整理得$x^2-2mx+2m^2-2=0$，$x_1+x_2=2m,x_1x_2=2m^2-2,\Delta=8-4m^2>0$，

又$S_{四边形PQNM}=4S_{\Delta OPQ}$；

$$S_{\Delta OPQ}=\frac{1}{2}|PQ|d=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}}|x_1-x_2|\frac{|m|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=|m|\sqrt{2-m^2}=\sqrt{m^2(2-m^2)}\leq 1,$$

所以当$m^2=1$时，四边形面积的最大值为4.

备注10：圆锥曲线中的范围最值问题，通常是构造函数求解或者利用基本不等式求解，在平时的解题中应多归纳和总结.

通过高中数学课程的学习，学生能发展数学学科六大核心素养，而六大核心素养即相互独立，又相互交融，是一个有机的整体. 以上就数学运算核心素养的培育进行探究，旨在提高学生学习数学的兴趣，提升学科能力.

参考文献

[1]孙宏安. 数学课程标准动词源流——学习《普通高中数学课程标准（2017年版）》[J]. 中学数学教学参考，2020（7）：2-5.

[2]章建跃. 核心素养导向的高中数学教材变革（续6）——《普通高中教科书·数学（人教A版）》的研究与编写[J]. 中学数学教学参考，2020（1）：44-49.