浅谈求解一维优化系统方法

兰晓博　任双双

郑州科技学院

[摘　要]上世纪九十年代，*S.Lie*为了研究微分方程，提出了一套理论，该理论被称为李群理论.利用李群理论求解偏微分方程的基本思路是，通过构造群不变量作为函数变换的基础，使偏微分方程（减少一个自变量）得到化简和求解.本文主要讨论了三维半单李代数的一维优化系统，根据任何三维半单李代数都和$sl(2)$同构，提出了利用同构关系做三维半单李代数的优化方法.

[关键词]李代数；优化系统；李代数同构；　型；　子代数

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2021.09.404

一、预备知识

李群和李代数的相关概念

以下部分理论来源于《李群基础》[7].

设M是一个群，又是一个m维的光滑流形，且映射F：$M\times M\to M$，$F(x,y)=xy^{-1}$是光滑的，则称M是一个m维李群.李群上的全体不变向量场，在交换子运算下构成李代数.下面我们介绍一下李代数的相关知识.

定义1.1　设L是域F上的向量空间.如果L上有一个运算：$L\times L\to L$，$(x,y)\to[x,y]$满足以下三个条件，则称L是一个李代数.

(1) $[\lambda_1X_1+\lambda_2X_2,Y]=\lambda_1[X_1,Y]+\lambda_2[X_2,Y]$，

(2) $[X,Y]=-[Y,X]$，

(3) $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$，对所有$L$中元素$x,y,z$成立.

如果η是李子代数L的一个子空间，且η对李括号封闭，则称η为L的李子代数.

定义1.2　一般来说，若f是从李代数L_1到L_2的双射，如果还满足如下条件

(1)　$f(\lambda X+\mu Y)=\lambda f(Y)+\mu f(Y)$，

(2)　$f[X,Y]=[f(X)+f(Y)]$.

则称f为从L_1到L_2的李代数同构.

设G是m维李群，X是G上的一个光滑切向量场，如果对于任意固定点a，满足$(L_a)_*X_x=X_{ax}$，则称X是G上的一个左不变的向量场.

定理 1.1[7]　李群G上的全体左不变向量场$Lie(G)$构成一个m维实李代数.反之，　每个李代数L总存在一个单连通李群G以L为李代数.

2. 李代数的伴随表示

定义 2.1 设G是李群，$g\in G$，由$AD_gh=ghg^{-1}$，$\forall h\in G$定义的自同构，称为G的内（共轭）自同构.

说　明　$AD_g:G\to G$是李群同构.因为$AD_gh=ghg^{-1}=R_{g^{-1}}L_gh$且$R$　L均为微分同胚；可以验证保持运算$AD_{g_1g_2}h=AD_{g_1}AD_{g_2}h$，而且这样的一个李群同构，一定诱导了一个李代数同构.

定义2.2　设g是李群G的元素，设L是G中的李代数，定义$Ad_g\triangleq dAD_g$称为G上的伴随表示(Ad,L)

$$Ad:G\times L\to L$$

满足

$$(Ad_gY)_e=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}AD_g\exp tY$$

即

$$AD_g(\exp tY)=\exp t(Ad_gY)$$

说　明　即满足以下交换图

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "Ad_g"] \arrow[d, "\exp"'] & L \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "AD_g"] & G \end{tikzcd}$$

二、对系统求解并优化改进

1. 利用不变量求解一维优化系统

设L是一个n维李代数，假定该空间的基是$\{v_1,\dots,v_n\}$，　称两个元素$v=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i$和$w=\sum_{j=1}^{n}b_jv_j$等价[4]，如果满足以下条件：

（1）　存在一个元素满足当$g\in G$使得$Ad_g(w)=v$，

（2）存在$v=cw$，其中c为非零常数.

需要注意的是，第二个条件虽然不是很明显，但是这个条件将在研究方法中起到重要作用.在本论文的算法中主要运用的就是不变性和伴随矩阵.

2. 求解优化系统不变量

利用以上结论，在这个部分我们将列举例子来具体说明求解优化体统不变量的过程.

例2.1　已知李代数$sl(2)$，设e_1,e_2,e_3为空间的一组基，并且满足下列关系：$[e_1,e_2]=2\cdot e_2$，$[e_1,e_3]=-2\cdot e_3$，$[e_2,e_3]=e_1$，设$v=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$和$w=\sum_{j=1}^{n}b_je_j$代入到（1）式中，其中$n=3$，我们可以得到：

$$Ad_{\exp(\varepsilon w)}(e)=(a_1e_1+\cdots+a_3e_3)-\varepsilon(\Theta_1e_1+\cdots+\Theta_3e_3)+O(\varepsilon^2)$$

由此可以得出$\Theta_i\ (i=1,2,3)$：

$\Theta_1=a_2b_3-a_3b_2$，　$\Theta_2=2a_1b_2-2a_2b_1$，　$\Theta_3=-2a_1b_3+2a_3b_1$.

对于任意的$b_i(i=1,2,3)$，它满足：

$$\Theta_1\frac{\partial\phi}{\partial a_1}+\Theta_2\frac{\partial\phi}{\partial a_2}+\Theta_3\frac{\partial\phi}{\partial a_3}=0$$

即为：

$$(a_2b_3-a_3b_2)(\frac{\partial}{\partial a_1}\phi)+(2a_1b_2-2a_2b_1)(\frac{\partial}{\partial a_2}\phi)+(-a_1b_3+2a_3b_1)(\frac{\partial}{\partial a_3}\phi)=0$$

将其转化为关于b_i的方程：

$$(-2a_2(\frac{\partial}{\partial a_2}\phi)+2a_3(\frac{\partial}{\partial a_3}\phi))b_1+(-a_3(\frac{\partial}{\partial a_1}\phi)+2a_1(\frac{\partial}{\partial a_2}\phi))b_2+(a_2(\frac{\partial}{\partial a_1}\phi)-2a_1(\frac{\partial}{\partial a_3}\phi))b_3=0$$

令b_1,b_2,b_3系数为零，可得：$\phi(a_1,a_2,a_3)=F(a_1^2+a_2a_3)$.其中$F$是任意一元函数，比如可以取$\Delta=a_1^2+a_2a_3$为$sl(2)$的一个不变量.

通过以上例子可以发现：求解过程中都需要求出Θ_i，然后反代到(4)式中，提出b_i系数令其等于零进行求解，下面我们就以$sl(2)$为例子再重复以上过程，看看有何新的发现.

3. 以$sl(2)$为例求解一维优化：

任给一个非零向量：$e=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$，现在我们的任务就是

通过伴随矩阵映射在v上使得系数a_i尽可能地简化.

取$\{e_1,e_2,e_3\}$作为李代数G的一组基.那么伴随映射$Ad_{\exp(\varepsilon v_i)}$就是李代数$G$的线性变换，这可以表示为一个关于李代数基的矩阵.为了简化这个计算的结果，将其定义为

$$A_1(t_1)=Ad_{\exp(-\frac{1}{2}\ln(t_1)\cdot e_1)},\quad A_2(t_2)=Ad_{\exp(t_2\cdot e_2)},\quad A_3(t_3)=Ad_{\exp(t_3\cdot e_3)},$$

求解$A_1(t_1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&t_1&0\\0&0&\frac{1}{t_1}\end{pmatrix}$，$A_2(t_2)=\begin{pmatrix}1&0&-t_2\\2t_2&1&-t_2^2\\0&0&1\end{pmatrix}$，$A_3(t_3)=\begin{pmatrix}1&t_3&0\\0&1&0\\-2t_3&-t_3^2&1\end{pmatrix}$.

在这组基下，v可以由矢量$(a_1,a_2,a_3)^T$表出，并且恒定不变量就是$\Delta=a_1^{\ 2}+a_2a_3$.

取v是一个非零向量$v=(a_1,a_2,a_3)^T$.首先我们假定$a_1\neq 0$，那么设v中$a_1=1$，即$v=(a_1,a_2,a_3)^T\sim v'=(1,a_2',a_3')^T$，其中$a_i'$构成了$v'$的坐标向量.通常情况下，为了更清晰明了地描述这个过程，我们就认为a_i'与a_i是等价的，那么上式就可以表示为$v=(a_1,a_2,a_3)^T\sim v'=(1,a_2,a_3)^T$.

在这里需要讨论一个事情，取任意正数λ，(a_1,a_2,a_3)对应的不变量是Δ，$(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$对应的不变量就是$\Delta'$，则$\Delta'=(\lambda a_1)^2+(\lambda a_2\cdot\lambda a_3)=\lambda^2\cdot(a_1^{\ 2}+a_2a_3)=\lambda^2\cdot\Delta$，由此可得$\Delta$与$\Delta'$之间只差一个正系数，我们总可以取得一个合适的数使$\Delta'$的系数$\lambda^2$化为1，即为$(a_1,a_2,a_3)\sim\lambda(a_1,a_2,a_3)$所以在$\Delta>0$的情况下，$\Delta$总可以化为1，同理，$\Delta<0$的情况下，$\Delta$可以化为$-1$.

下面讨论a_1,a_2,a_3的取值，使得一维优化形式最简：

利用李代数群映射关系$Ad_g(v)=\bar{v}$，下面就分情况分析.

当$\Delta=a_1^2+a_2a_3$大于零时，显然有a_1,a_2,a_3不全为零，经分析可知，a_2,a_3不全为零时，$a_1=0$.不妨设$a_2\neq 0$，用A_3作用$a_1=0$，$a_2=a_2$，$a_3=\frac{\Delta}{a_2}$，再用A_1作用$\left(0,t_1a_2,\frac{\Delta}{t_1a_2}\right)$取$t_1=\frac{1}{|a_2|}$，得到$(0,t_1a_2,\frac{\Delta}{t_1a_2})\sim(0,1,\Delta)$.所以$(0,a_2,a_3)\sim(0,1,\Delta)$.

再用A_2A_3作用在$(0,1,\Delta)$可以得到$(t_2t_3^{\ 2}-\Delta t_2+t_3,t_2^2t_3^2-\Delta t_2^2+2t_2t_3+2,-t_3^2+2\Delta)$.

取 $t_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\Delta}}$，$t_3=-\sqrt{2\Delta}$或$t_2=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\Delta}}$，$t_3=\sqrt{2\Delta}$.

由此可以得到$(0,1,\Delta)\sim(0,-1,-\Delta)$；

当$\Delta=a_1^2+a_2a_3$小于零时，得到的是$(0,1,\Delta)$；

当$\Delta=a_1^2+a_2a_3$等于零时，a_2,a_3不全为零，否则为零向量了.不妨设$a_2\neq 0$同上，用$A_3A_2A_1$作用$a_1=0$，$a_2=a_2$， 得到$(0,0,1)$即e_3.

由此可以得到以下结论：

δ大于零时：$(0,1,\Delta)$；δ小于零时：$(0,1,\Delta)$；δ等于零时：$(0,0,1)$.

由此可得一维优化为$(0,1,1)$，$(0,-1,1)$，$(0,0,1)$.

即$\{e_2+e_3,e_2-e_3,e_3\}$为一个优化结果.

三、三维半单李代数的一维优化系统

1. 利用同构方法找出优化系统

通过以上的研究，在求解优化系统的过程中也可以从同构的角度出发，这样做和传统的方法比起来更加简便也不必对各个情况逐一分析，有效地提高了解题效率，下面我们就深入探讨一下这种方法的应用，为了保证文章结构的完整性，我们先给出一个定理.

定理3.1[5] $H_\alpha\in\eta$，使得$B(H_\alpha,H)=\alpha(H)$，这样有：

(1) $\eta=\sum_{\alpha\in\Xi}\mathbb{C}H_\alpha$，

(2) $[X,Y]=B(X,Y)H_\alpha\quad X\in L_\alpha,Y\in L_{-\alpha}$，

(3) $[L_\alpha,L_{-\alpha}]=\mathbb{C}H_\alpha$.

定理3.2[5] 取L_α中非零元素X_α，一定存在$X_{-\alpha}\in L_{-\alpha}$使得$B(X_\alpha,X_{-\alpha})=1$，定义$H_\alpha\triangleq[X_\alpha,X_{-\alpha}]$，则 $S_\alpha:\mathbb{C}H_\alpha\oplus\mathbb{C}X_\alpha\oplus\mathbb{C}X_{-\alpha}$是$L$的一维子代数，同构于$sl(2)$.

注 因为$\alpha(H_\alpha)$一定不为零，所以令$h_\alpha=\frac{2}{\partial(H_\alpha)}H_\alpha$，$e_\alpha=X_\alpha$，$f_\alpha=\frac{2}{\partial(H_\alpha)}X_{-\alpha}$，那么就有下列的交换关系：

$[h_\alpha,e_\alpha]=2e_\alpha$，$[h_\alpha,f_\alpha]=-2f_\alpha$，$[e_\alpha,f_\alpha]=h_\alpha$.

因此，S_α同构于$sl(2)$.

由此就可以得出一个结论：所有三维半单一维李代数都和$sl(2)$同构.

例3.1 已知李代数L

	μ_1	μ_2	μ_3
μ_1	0	$3\mu_1$	μ_2
μ_2	$-3\mu_1$	0	$3\mu_3$
μ_3	$-\mu_2$	$-3\mu_3$	0

易知这是半单李代数，它的卡当子代数为：$\eta=Span\{\mu_2\}$.根的分解：正根3，根向量取为μ_3；负根$_{-3}$，根向量取为$-\frac{1}{6}\mu_1$.可以验证$B\left(-\frac{1}{6}\mu_1,\mu_3\right)=1$，取中性元$h_\alpha=[-\frac{1}{6}\mu_1,\mu_3]=-\frac{1}{6}\mu_2\in\eta$，

由定理4.2，取

$$e_1=\frac{2}{B(h_\alpha,h_\alpha)}h_\alpha=-\frac{2}{3}\mu_2,$$

$$e_2=\mu_3,$$

$$e_3=\frac{2}{B(h_\alpha,h_\alpha)}\left(-\frac{1}{6}\mu_1\right)=-\frac{2}{\mu_2}\left(-\frac{1}{6}\mu_3\right)=-\frac{2}{3}\mu_1.$$

则$S_\alpha:\mathbb{C}e_1\oplus\mathbb{C}e_2\oplus\mathbb{C}e_3$同构于$sl(2)$.在同构意义下，一维优化系统是一样的， 所以李代数L的一维优化系统为

当$\delta>0$时：$e_2+\delta e_3=\mu_3+\delta\cdot\left(-\frac{2}{3}\mu_1\right)\sim\mu_3-\mu_1$，

当$\delta<0$时：$e_2+\delta e_3=\mu_3+\delta\cdot\left(-\frac{2}{3}\mu_1\right)\sim\mu_3+\mu_1$，

当$\delta=0$时：$e_3=-\frac{2}{3}\mu_1\sim\mu_1$.

其中δ为例3.1中所求的$sl(2)$的不变量Δ，且根据伸缩可以任意取δ的值，以求结果最简.

通过上面的例子我们可以得到的结论就是：利用上述办法， 任何三维半单李代数一维优化系统都可以得到.首先给出三维半单李代数和$sl(2)$的同构映射，然后写出对应的一维优化系统，最后通过伸缩得到最简化结果.这种方法与之前利用传统方法求解一维优化系统的方法更加简便易行，是一种行之有效的办法.

参考文献

[1]吕桂稳,王雅茹,薛志群.一类常微分方程的解及其应用[J].石家庄铁道大学学报(自然科学版),2021,34(02):123-126.

作者简介:

兰晓博，1993.12，男，汉族，河南省平顶山市，硕士研究生，助教，研究方向：马氏随机过程。