二次函数最值问题的求解策略

吴敏

（昭苏县第五中学　835600）

[摘　要]初中数学在教学过程当中所面临的相对棘手和重要的内容就是二次函数，特别是二次函数的最值问题，更是让无数的学生感觉到难以理解。中考和初高中衔接阶段当中，学生需要完成的都包括对二次函数最值的求解问题的理解和解决。对二次函数最值进行求解能够使得学生的创新思维能力以及问题解决能力得到非常有效的培养。

[关键词]二次函数；最值

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6261.2020.12.325

二次函数属于初中数学教学阶段当中的难点，同样也属于教学阶段当中需要掌握的重点[1]。初中生应该对初中阶段与二次函数相关的全部知识做到基本的正确掌握，从而通过对数学思想的合理应用来实现自身问题解决能力的有效提高。二次函数最值问题的求解会涉及非常广泛的知识面，同时所应用的解决方式也是非常多元化的，对技巧性有着比较强的要求。对这类题目进行大量的练习能够使得大脑的思维能力得到非常有效的训练。二次函数的最值问题从来都不是教科书里面特别设计出来的专题，通常都有着比较零散的内容分布。从而使得学生对于整个的二次函数最值问题有着清晰的认知，就要在实际的教学过程当中对与这个问题有关的内容进行比较完整的整合以及构建。本人借助网络资源以及课外收集到的资料，对相关问题作出下列归纳：

一、无条件二次函数求最值问题

这种题型的最值在求解的过程当中是非常方便的，我们通常选择包括换元法以及判别式法和图像法与配方法在内的各种简单方法完成解题。目前应用的最为常见而且相对简单的经典方式就是配方法[2]。

例1：若二次函数 $y=ax^2+4x+a-1$ 的最小值是2，则a的值为（ ）。

解：因为二次函数 $y=ax^2+4x+a-1$有最小值2，所以$a>0$，函数图象开口向上，

$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4a(a-1)-4^2}{4a}$因为函数最小值为2，所以$\frac{4a(a-1)-4^2}{4a}=2$

整理得$a^2-3a-4=0$，解得$a=-1$或4　因为$a>0$　所以$a=4$

二、有条件的二次函数最值问题

1.代数法

代数法的基本流程就是通过一系列的初等变化来完成不等式$y\geq a$或者$y\leq a$的推出，同时还需要对定义域当中的顶点(x_0,y_0)进行确定，当$y_{(x)}=y_0$的时候，最值得到确定。具体步骤归纳如下：

通过配方处理

把$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$转化成为$y=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}(a\neq 0)$。

（2）分情况进行处理

抛物线$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的顶点坐标是$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$，对称轴方程是$x=-\frac{b}{2a}$，当$a>0$时，抛物线的开口向上，并且向上无限延伸；当$a<0$ 时，抛物线的开口向下，并且向下无限延伸

在$x<-\frac{b}{2a}$时是递减的，在$x>-\frac{b}{2a}$时是递增的；在$x=-\frac{b}{2a}$处取得$y_{最小}=\frac{4ac-b^2}{4a}$，当$a<0$时，二次函数在$x<-\frac{b}{2a}$时是递减的；在$x=-\frac{b}{2a}$处取得$y_{最大}=\frac{4ac-b^2}{4a}$。结合图像把改变的数值代入求解，就可以得到最终的结果。

例2：求函数$y=-x^2+4x-2$ 在$0\sim 3$范围内的最值（包括0和3）。

解：$y=-x^2+4x-2=-(x-2)^2+2$，x在$0\sim 3$之间。

$a=-1<0$，当$x=2$时，存在y的最大值2，0和3与2之间的距离分别是2和1，那么也就是$x=0$的时候，y存在最小值为-2。

2.数形结合法

每年的中考都会对二次函数的最值问题展开或简单或复杂的考察。初中学习阶段当中，往往都是对一个二次函数进行给定，假设二次项的系数为正，那么它相应的图像就是开口向上，函数不存在最大值，存在最小值。假设二次项的系数为负，那么它相应的图像就是开口向下，函数不存在最小值，存在最大值。二次函数自变量的取值范围是所有实数的时候，二次函数的最值位置就是抛物线的顶点。相对复杂的题型就是在给定区间当中，对二次函数的最小值或者是最大值进行求解。数形结合思想是对于这类问题进行解决的关键思想，对数据结合思想的合理应用要求学生需要实现函数性质与函数图像特点的有机结合，这样能够使得学生对于相关的解题技巧有着更加深入的理解和掌握。

数形结合思想的根本就在于画出图像，并且按照图像来展开详细的观察，从而获取到自己所需要的信息和最终的结论。

3.分析法

二次函数在特定区间当中属于单调函数，在这个特定区域当中存在最大值或者最小值。这种方式就是对这个原理的应用来确定最值绝对存在于$f_{(n)}$；$f_{(m)}$；$f_{(\frac{b}{2a})}$当中。三者当中的最小值和最大值就是我们最后需要求得到的最小值和最大值。在对三个数值进行计算和比较之后，就可以得到最终的答案。

例3：小区里面有一家明明日用品零售商店，明明日用品零售商店会按照具体的销售合同，从某公司批发部以批发单价的成本按月对每把8元的雨伞进行购进，每次最少购进100把雨伞。明明商店按照实际的销售记录，以14元每把的零售单价对这批雨伞进行出售，能够创造出100把的月销售量，假设零售单价每往下降0.1元，月销售量就要有5把的增加。

（1）明明日用品零售商店按照14元每把的零售单价对雨伞进行出售的时候，每个月能够创造出多少的利润？

（2）明明日用品零售商店在选择降价销售策略之后，在降价幅度为多大的时候能够创造出最大的利润？最大的利润是多少元？

解：（1）$(14-8)\times 100=600$（元）

（2）假设降价X元的时候能够赚取到最大的利润，能创造出的最大利润是Y元那么得出

$$Y=(14-X)\left[100+\frac{X}{0.1}\times 5\right]-8\left[100+\frac{X}{0.1}\times 5\right]=50\left[-(X-2)^2+16\right]$$

由此可得，当$X=2$的时候，利润最大，最大利润值是800元。

对二次函数的最值问题进行求解的过程当中，需要保持充分的细心，对问题当中所包含的隐含条件进行大力的挖掘和积极的找寻，各种类型的数学知识之间都存在着相辅相成的关系，题目当中所给出的条件从来都不是独立存在的，学生需要积极的去思考和联想两者之间的关系，才能够对数学问题得到更加有效的解决，用更短的时间找出解决问题的最佳方式。

参考文献

[1]邹靓靓.基于初中数学二次函数中最值问题的思考[J].理科考试研究，2016（02）：1

[2]数学课程标准研制组.数学课程标准解读[M].北京师范大学出版社，2011（09）