例谈高职数学极限概念的情境教学

杨宁

（南通师范高等专科学校　江苏　南通　226010）

[摘　要]极限概念是高等数学的重要基石，其精确定义在极限思想萌芽近2000年后才被给出。极限概念的理解一直困扰着众多高等数学初学者。多年来，不少国内外学者对极限概念的教学做了大量研究，但都未能从根本上改变极限概念教学难的现状。本文通过创设特定的情境，将极限概念的本质和学生的生活经验自然地联系起来，使得抽象的$\varepsilon-N$定义变得生动具体，从而提高学生的学习主动性和学习效果，在一定程度上缓解极限概念教学难的问题。

[关键词]情境教学；数列极限；高等数学；高职

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6261.2021.03.1475

一、极限概念教与学的问题现状

极限概念是高等数学的起点、重要基石，贯穿于现代数学多数分支。而极限思想在2000年前就已萌芽，是人类从有限到无限的认知过程中的必然产物。古希腊哲学家阿基米德完善的穷竭法和我国魏晋时期数学家刘徽的割圆术，都是极限思想的杰出代表。然而，完全摒弃了直观性描述的、严格的极限定义直到19世纪才被给出，即使17世纪牛顿、莱布尼兹就已独立发明了微积分。这说明，极限概念的理解不是简单的，而极限概念也一直是大学数学教学的难点。纵使众多数学教育工作者、数学家们投入了大量研究，仍未根本性解决极限概念教学难的问题。[1]

据调查，江苏高职院校省内生源的数学基础差异非常大，有三分之一的学生认为高等数学课堂教学内容太难、跟不上，仅有少量学生认为所学内容简单。[2]高职学生中　“乐于学习”“愿意学习”“厌烦学习”“放弃学习”的人数比例大致为$6:30:50:14$。[3]因此，降低极限概念的理解难度，激发高职学生的学习兴趣，提高学生的学习主动性，是当前高职数学教师面临且需要解决的问题。

二、高职数学数列极限概念的情境教学对策

基于情境的数学启发式教学能够在一定程度上解决上述问题。因为将所学知识和学生生活经验相结合的数学情境，能够让抽象的数学问题具体化，激发学生的情感参与，同时也促进学生的思维参与；结合教师的引导促使学生主动体验、建构并达到对数学问题本质的理解，从而提高学生学习的兴趣和迁移能力。[4]笔者根据自己的教学实践，例谈极限概念的情境教学。

（一）铺垫情感

介绍刘徽求单位圆面积的割圆术，“割之弥细，所失弥少，割之又割以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”，指出刘徽曾计算得到：单位圆内接正192边形的面积约是$\frac{157}{50}=3.14$，内接正3072边形的面积约是$\frac{3927}{1250}=3.1416$。若不是受限于当时的计算技术，刘徽定能算得更准确的圆面积，让学生体会到刘徽精益求精的科学精神，做好理解极限定义中ε的情感铺垫。事实上，在后面讲授第一个重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$的时候，还可以回到这个例子上来，因为通过计算易得圆内接正n边形的面积是$\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$。

（二）情境法引出极限的直观定义

为了方便计算突出本质，可以求由$y=x^2$，$y=0$，$x=1$围成的曲边三角形的面积S，来引出数列极限的直观（描述性）定义。按穷竭法，将位于x轴上的边平均分成n份，以每一份为宽（底），作曲边下最长（高）的矩形。通过计算易得这些矩形面积之和为$S_n=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$，以它去近似曲边三角形的面积。当$n$无限增大时，矩形面积之和无限接近曲边三角形面积。实际教学中，可以通过GeoGebra等软件制作反映逼近过程的动态图像展示给学生，直观方便便于理解。

利用计算器计算某些特定的S_n，如S_{10}, S_{100}, S_{1000}, S_{10000}等等。容易发现当n无限增大时，S_n无限接近$0.333\cdots=\frac{1}{3}$。自然地，给出数列极限的直观定义：若当n无限增大时，a_n无限接近a，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。但直观定义中无限接近四个字，受主观性的影响太大，不够精确，以致于部分学生不能有效判断如常数列、$\left\{\frac{2}{n+1}\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$等的简单极限。[5]即使在说明$a_n$无限接近$a$可用$|a_n-a|$无限接近0代替后，仍会产生错误的判断，还是需要经典的$\varepsilon-N$定义将其严格化。

（三）拓展情境联结$\varepsilon-N$

考虑情境：甲方寻求测量技术最好的供应商。乙方熟练掌握割圆术、穷竭法，联系甲方。甲方决定测试乙方的测量技术，让乙方测量上述曲边三角形模具的面积s，且仅甲方已知模具面积为$\frac{1}{3}$。甲方知道实际测量的误差不可避免，总是会任给乙方一个误差$\varepsilon>0$，看乙方是否能达标，若乙方能达标，则甲方会继续任给另一个误差，直到乙方不能达标为止。乙方按穷竭法测量，测量结果记为S_n。自然地，甲方给的误差ε是越小越好，且是越给越小。需要指出的是，若模具准确面积为一无理数，乙方一般不能通过S_n观察得出其直观极限。教师启发引导学生探索以下两个情形。

情形一：如果乙方将S_n提交给甲方，那么甲方会发现，对他所任给的误差ε，总能够从S_n中找到一个正整数N，使得乙方第N次以后的每次测量都能达标，即当$n>N$时，总有误差$=\left|S_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$。事实上，$\left|S_n-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}$，要

使 $\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}<\varepsilon$，可由韦达定理解出只需 $n>\frac{3+\sqrt{9-24\varepsilon}}{12\varepsilon}$ 即可。例如，甲方先给误差0.01，N则可取大于等于 $\frac{3+\sqrt{9-24\times0.01}}{12\times0.01}$ 的最小整数50，乙方就能达标；甲方若再给误差0.0005，N则可取大于等于 $\frac{3+\sqrt{9-24\times0.0005}}{12\times0.0005}$的最小整数1000，乙方就能达标……

情形二：作为乙方，在甲方任给一个误差ε后，需要应对甲方。那么乙方就需要估计自己的测量误差。乙方知道，如果每次测量时所作的矩形改为超过曲边的最矮矩形，则新的矩形面积之和为$S'_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$，且$S'_n>S>S_n$。则乙方能估计出他的测量误差$|S_n-S|<|S_n-S'_n|=\frac{1}{n}$。那么，乙方发现，要达标（即$\frac{1}{n}<\varepsilon$），可以取第$\frac{1}{\varepsilon}$次后的任一次测量（即当$n>\frac{1}{\varepsilon}$时，$|S_n-S|=\frac{1}{n}<\varepsilon$）。例如，甲方先给误差0.01，$N$则可取大于等于$\frac{1}{0.01}$的最小整数100，乙方任取第$N$次后的一次测量提交给甲方就能达标；甲方若再给误差0.0005，N则可取大于等于$\frac{1}{0.0005}$的最小整数2000，乙方就能达标……

通过对上述两个情形的探讨，可以自然地总结抽象出极限的精确定义：

设$\{a_n\}$是一个数列，a是一个常数。若对任给的正数ε，总能找到正整数N，使得$n>N$时总有$|a_n-a|<\varepsilon$，则称数列$\{a_n\}$收敛于a，或a是数列$\{a_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。

在学生充分理解精确定义后，再介绍数学的形式化符号$\forall$、$\exists$等，不致于增加极限精确定义的理解难度。

根据上述两个情形中ε与N的关系，学生不难理解：N与ε是相关的，作为误差的ε也是变化的，越小越好，且N一般会随ε的改变而改变。在这个意义上，N可以看作是ε的函数$N(\varepsilon)$，但又不准确，因为同一个ε可以对应不同的N，N取大一点总是可以的。而在传统的教学中，学生在理解变量ε及其与N的关系上有较大困难。

（四）极限证明的适度形式化

用极限的精确定义来证明极限，也是极限概念教学的难点。事实上，对于高职学生，证明里涉及的计算不要求太复杂，所以可以在极限证明上的可以要求适度的形式化[6]，这样还能降低学生写出完整证明过程的难度。

可以考虑填空式地证明命题$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$：“对任给的正数$\varepsilon$，可以取正整数$N$为__A__，当$n>N$时，总有（$|a_n-a|=$）__B__$<\varepsilon$，则由极限定义命题成立。”学生只需要恰当填上A、B两个空格即可完成证明。其主要步骤是从B空格入手，按极限内容代入$|a_n-a|$，即转化成关于n的代数式，简化后由条件$n>N$再转化为关于N的代数式，令它$<\varepsilon$，由此不等式解出N的范围，选取N的值填A空格，再补全B空格。

例如：对应于情境的情形一，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$的证明可以这样写：对任给的正数$\varepsilon$，可以取正整数$N$为$>\frac{3+\sqrt{9-24\varepsilon}}{12\varepsilon}$的任一整数，当$n>N$时，总有$\left|\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}\right|=\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}<\frac{1}{2N}-\frac{1}{6N^2}<\varepsilon$，则由极限定义命题成立。证明中的长（不）等式涉及一个可能困扰高职学生的初等不等式的证明和韦达定理的应用。经验表明，不少高职学生学不好高等数学恰是因为初等数学（如三角函数部分）的基础不扎实。因此，这个证明对高职学生并不容易。还可以考虑情境的情形二，这样证明：对任给的正数ε，可以取正整数N为$>\frac{1}{\varepsilon}$的任一整数，当$n>N$时，总有$\left|\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}\right|=\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}<\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$，则由极限定义命题成立。显然地，情形二对应的证明更简单一些，因为用到了乙方对测量误差的估计。这就是所谓的缩放技巧，也是学生初学极限证明时的难点，而在情境下缩放技巧就显得很自然，且被具体化了，$\frac{1}{n}$就是第n次测量时以曲边上相邻对应分点连线为对角线所作矩形的面积之和，也即宽$\frac{1}{n}$长1的矩形面积。

参考文献

[1]潘建辉，郑继明，李红刚.极限概念教学难点分析及其突破策略[J].高等数学研究，2014，17（5）：25-29.

[2]朱翔.高职院校数学教学改革与学生能力培养的探索与实践[J].职业技术教育，2016，37（29）：43-45.

[3]胡永红.高职数学极限概念引入的教学探讨[J].中国校外教育，2011，（5）：61.

[4]毕秀国，宋福贵，董晓梅，吕传汉.基于情境的数学启发式教学在经济类高等数学教学中的实践与探索[J].数学教育学报，2010，19（3）：93-96.

[5]Senfeng Liang.Teaching the concept of limit by using conceptual conflict strategy and Desmos graphing calculator[J].International Journal of Research in Education and Science（IJRES），2016，2（1）：35-48.

[6]张艳霞，龙开奋，张莫宙.数学教学原则研究[J].数学教育学报，2007，16（2）：24-27.

［基金项目］江苏省高校在线开放课程“高等数学（一）”、江苏省高校“青蓝工程”项目资助。

作者简介:

杨宁（1982-），男，南通师范高等专科学校STEAM教育研究所，讲师。