

方程思想在初中几何问题中的应用

周新林 黄国安

(江西省瑞昌市第八中学 江西 九江 332200)

[摘要] 方程思想是初中数学的教学中, 是一种非常重要的解决数学问题的方法, 在解决几何问题时具有一定的优越性。在初中几何的问题中采用方程思想去解决几何问题, 实际上是姜代数的解题方法应用在解决几何问题上, 从而降低了几何问题的难度。在初中阶段的很多知识点中都隐藏着方程思想的影子, 方程思想在本质上和代数具有一定的关联性, 因此, 有一些几何问题和方程思想几乎没有什么联系, 但是在解题的过程中, 如果不运用方程思想, 问题解决起来会存在着一定的难度。因此, 教师要注重培养学生去发现问题中隐藏的条件, 并根据这个条件来解决问题, 培养学生使用方程思想解决几乎问题的能力。

[关键词] 方程思想; 初中几何问题; 应用

[DOI] 10.12252/j.issn.2096-6261.2021.04.1311

方程思想作为一种代数解题方法, 被广泛地用来解决数学问题, 这种方法注重从分析数学问题的数量关系着手, 在解决问题的时候, 通过设未知数来将已知量和未知量产生等量关系, 通过设立方程或者方程组的形式来解决数学问题, 建立方程模型是应用方程思想的关键。在初中几何的线段以及角的问题求解的过程, 都可以使用方程思想来对数学问题进行求解, 因此, 教师可以根据特意和图形关系等, 在其中找到可以建立方程的等量关系, 就可以通过建立方程或者方程组的形式, 把几何问题转化成为代数问题来求解, 可以帮助学生梳理出清晰的思路, 使, 使几何问题的解决过程更加的简单。

一、初中几何知识概况

在初中数学的教学过程中, 方程思想始终伴随着数学的学习过程中, 为解决数学问题提供了有效的方法和手段。在初中的数学教材中, 几何内容主要有三角形、圆以及四边形。方程的形式主要有一元一次方程、二元一次方程或者方程组, 有的时候也会涉及到分数方程。一元二次方程在解决初中的一些数学问题, 也可以会被用到。众所周知, 在一元一次方程中只有一个未知数, 未知数的次数是1, 在一元一次方程中, 等式两边都是整式, 方程的解也只有一个。一元二次方程是在这个等式中, 未知数是有1个, 但是未知数的次数是2, 方程两边也同样是整式的形式, 这样的方程就叫二元一次方程。如果等式中包含两个未知数, 并且未知数的次数都是1次的, 这样的方程就叫作二元一次方程, 但是要想解决二元一次方程, 通常都是以二元一次方程组的形式, 这样才能解决出两个未知数, 使方程得到解决。分式方程作为一种特殊形式的方程也是方程的一种, 在分母上含有未知数或者含有未知数的整式。

二、如何将方程思想应用到初中几何教学活动中

在初中的代数知识的学习过程中, 方程思想贯穿在数学学习的过程始终, 方程思想和初中代数教学具有紧密的联系。但是, 这并不意味着方程思想就和初中的几何教学没有联系, 不能简单地把初中代数和几何简单地割裂开来, 数学是一门逻辑性很强的学科, 数学知识之间都有着千丝万缕的联系。在初中数学教材中, 方程可以把任何现实世界中的相关联的各种数量关系通过模型来表达出来^[1]。因此, 方程思想不仅是解决代数问题必不可少的工具, 同时也可以帮助学生去解决几何领域的各种问题, 只要是存在着数量关系, 都可以通过方程思想来进行解答。具体地说, 就是通过图形的一些形式去建立方程, 再通过对方程的解析来获取答案。因此, 方程思想是一种很重要的解决初中几何问题的方法和手段, 使用方程思想解决几何问题, 可以使几何问题解决起来更容易。

三、在运用方程思想解决几何问题需注意的问题

方程思想被广泛地应用在数学问题的解答中, 而很多学生往往在学习中遇到了方程问题, 才去使用方程思想去解决问题, 对数学技能的应用不够灵活。因此, 要想让学生灵活的使用方程思想去解决数学问题, 学生必须做到以下几点:

首先学生具备正确列出方程的能力。正确列方程是使用方程思想的关键, 因此, 学生要能够在题干给出的条件中找到等量关系。其次学生要具备用方程思想解决问题的意识。有些几何问题在表面上看和代数问题没有丝毫的关系, 但是却需要利用代数方法通过列方程才能使几何问题得到有效的解决, 因此, 教师要引导学生去挖掘隐含的条件, 去构建方程。还有一些综合性的问题, 条件比较多, 解决起来比较复杂, 需要通过构建方程把问题一步一步的简化, 才能使问题得到解决。在平时的学习中, 教师要帮助学生不断的积累用方程思想解决问题的方法, 让学生去尝试一题多解, 然后去选择最优的方法。这样可以有效地锻炼学生的思维能力。再次, 要掌握运用方程思想解决问题的要点。除了在几何的计算问题当中需要使用方程思想来解决问题之外, 经常使用到的还有一元二次方程的根的判别式, 根与系数关系、方程、函数、不等式的关系等内容, 在解决这些问题的时候, 也要注重方程思想的应用^[2]。

四、用方程思想解决初中几何问题常见的切入点

利用方程思想的方法去解决初中数学中的几何问题, 比较常见的方法有: 第一种在解决三角形的问题时, 利用三角形内角和是180度的特点, 来建立方程, 然后通过解方程来获取答案。在初中数学中, 很多和代表性有关的问题, 一般都是给出内角和的度数, 再去求边数, 都是利用内角和的公式 $(n-2) \times 180^\circ$, 来建立方程, 然后再去解方程, 这样就很容易得到问题的答案。第二种是根据相似三角形的性质和方程思想相结合, 利用相似三角形的对应边是成比例的这一性质, 因此, 在解决类似的问题时, 经过会利用这个性质将几何和方程相融合, 使问题得到解决。第三种是利用勾股定理的性质来构建方程, 勾股定理在数学领域是非常重要的定理, 同时生活实用性也非常强, 经常会被用在人们的生活实践中。第四种是根据面积公式来建立方程关系, 在几何问题中, 可以通过面积关系来构建方程, 通过对问题的层层梳理, 来找到解答问题。第五种是通过三角函数关系来建立方程, 三角函数也是被广泛应用在几何问题的解答中, 同时也和我们的实际生活密切相关, 三角函数经常被用在测量的问题中, 通过三角函数的来构建方程, 再通过解方程, 来解答数学问题。第六种是利用圆的性质关系, 来建立方程, 将圆的性质关系和方程思想相结合, 可以解决和圆相关的各种问题。

五、利用方程思想解决初中几何问题的方案

(一) 用方程思想求解角度问题

利用三角形内角和的特点, 结合方程思想, 通过列方程来解答几何问题, 使方程思想在解答几何问题上发挥良好的作用。

例如1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A + \angle B = 120^\circ$, $\angle C = 2\angle B$, 求三角形的三个内角的度数, 并判断该三角形的类型。

分析: 要想求解三角形的三个内角, 必须利用三角形内角和是180度这个特性来寻找已知量和未知量之间的关系, 并

据此来列出等量关系。我们假设 $\angle B=x$ ，那么 $\angle C=2x$ ，根据 $\angle A+\angle B=120^\circ$ 可得 $\angle A=120^\circ-x$ ，根据三角形内角和定理可列出下列方程：

$120^\circ-x+x+2x=180^\circ$ ，解方程得： $x=30^\circ$ ，因此，三角形的三个内角分别为：

$\angle A=90^\circ$ ， $\angle B=30^\circ$ ， $\angle C=60^\circ$ 。因此，该三角形为直角三角形。

例如2：在正多边形的外角和是360度，其内角和是外角和的2倍，那么这个正多边形内角度数。

分析：在这个问题中，就要用到多变量内角和的公式， $(n-2) \cdot 180^\circ$ 来建立等量关系，来构建方程。如果设，正多边形的边数是n，那么根据外角是内角的补角的特点，可以列出关系式： $(n-2) \cdot 180=2 \cdot 360$ ，解得： $n=6$ ，然后再将n=6代入到公式中求出内角： $(n-2) \cdot 180^\circ$ 除以n，得到，正多边形的内角为120度。

在这类问题的解答中，利用三角形的内角和是180度的特点，来求角的度数的问题，通过方程思想的应用，得到有效的解答，既简单又明了。多边形外角和和补角的相关性质，来求角度的问题，也是中考的一个考点，因此，教师要引导学生抓住题意，找到等量关系，将几何和方程思想有机结合起来，使几何问题转化为方程问题，使问题得到顺利的解决。

(二) 平面几何的折叠问题

在初中的几何学习中，涉及到的几何问题，折叠问题是非常具有代表性的问题，在折叠问题当中，有线段的折叠问题，三角形的折叠问题以及四边形的折叠问题，通过方程思想的应用，梳理图形中的等量关系，有效地解决了几何折叠问题，下面分别将该问题的几何解法和运用方程思想来解决问题的方法分别举例展示，以便让学生更好地体会方程思想在几何解题中的应用。

例如，将矩形ABCD沿着BD折叠，使点C落在C'点，BC'交AD于E，AD=8，AB=4，求BED的面积

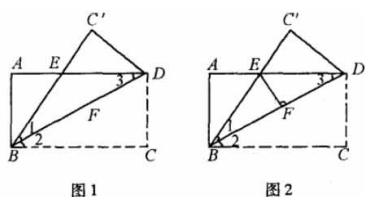


图1

图2

解法1，如图2，在矩形ABCD中，AD//BC，所以 $\angle 2=\angle 3$ 。当巨型ABCD沿着直线BD进行折叠后，三角形BC'D与三角形BCD关于直线BD对称，所以 $\angle 1=\angle 2$ ，所以 $\angle 1=\angle 3$ ，因此，三角形BED是等腰三角形，BE=ED。

作EF垂直于BD，交点为F，那么BF是BD的一半，由于三角形BEF相似于三角形BDC'，所以EF:CD=BF:BC'，而BD=4√5，C'D=4，BC'=8

所以EF/4=2√5/8；EF=√5

所以三角形BDE的面积=1/2*BD*EF=1/2*4√5*√5=10

解法2，证明三角形BED是等腰三角形方法和上面的解法相同，这里不再将解题过程重复叙述。设BE=X，由于BE=ED，所以AE=8-X，在直角三角形ABE中，利用勾股定理可得：4的平方+(8-X)的平方=X的平方，解这个方程但是，X=5，所以三角形BDE的面积为1/2*BD*AB=1/2*5*4=10

在这两个解题的过程中，前一个是用几何的方法，也是比较常规的解题方法。后一个方法就是利用方程思想来解决问题，既简单，又直观，让人一目了然，思路清晰，所以用方程思想来解决几何问题，更加容易。方程思想的渗透，增加了几何问题的解决方式，使几何问题的解决更加的多样化，也使得几何问题得到了有效的简化。因此，教师在教学过程中，要善

于引导学生去探究多种几何问题的解决方法，灵活地运用所学的数学知识解决不同类别的数学问题，进而培养的创新意识和创新思维。

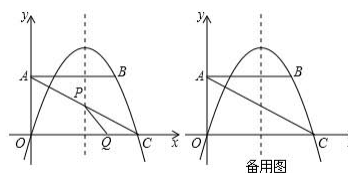
(三) 平面几何中运用方程思想解决函数与几何图形中的相关问题

在平面几何中，运用方程思想解决问题的类型有：函数与三角形、函数与四边形、函数与圆等的问题解析的时候，都可以使用方程思想解决这类问题，以几何图形与二次函数相结合的题目为例。

例如，在平面直角坐标系中，四边形OABC是直角梯形，AB//OC，OA=5，AB=10，OC=12，抛物线y=ax²+bx经过点B、C两点

1. 求抛物线的解析式；

2. 一动点P从点A出发，沿AC以每秒2个单位长度的速度向点C运动，同时动点Q从点C出发，沿CO以每秒1个单位长度的速度向点O运动，当点P运动到点C时，两点同时停止运动，设运动时间为t秒，当t为何值时，△PQC是直角三角形？



解(1) ∵OA=5，AB=10，OC=12，

∴点B(10，5)，C(12，0)，

∴100a+10b=5，144a+12b=0，解得a=-14，b=3，

∴抛物线的解析式为y=-14x²+3x。

3. 根据勾股定理，AC=OA²+OC²=5²+12²=13。

∵点P沿AC以每秒2个单位长度的速度向点C运动，点Q沿CO以每秒1个单位长度的速度向点O运动，∴点P运动的时间为：13÷2=6.5(秒)。

则CP=AC-AP=13-2t，CQ=t，

∵∠ACO≠90°，∴分∠PQC=90°和∠CPQ=90°两种情况讨论：

①当∠PQC=90°时，cos∠ACO=CQ:CP=OC:AC，即t:13-2t=12:13，解得t=156/37；

②当∠CPQ=90°时，cos∠ACO=CP:CQ=OC:AC，即13-2t:t=12:13，解得t=169/38。

综上所述，t=156/37或169/38时，△PQC是直角三角形。

本题就是利用二元一次方程组来解决解析几何中的二次函数解析式的问题，利用了相似三角形中对应边成比例的特点，来列出方程，推断直角三角形存在的可能性问题、点的移动问题等，这个问题有效地综合了初中几何中相似三角形的与函数问题，融合了方程思想，有效地解决了几何问题，让学生在学用方程思想解决几何问题的同时，也复习巩固了函数的相关知识，有效地提升了学生的逻辑思维能力和灵活运用所学的方程知识解决几何问题的能力。

结束语

在初中数学的教学实践中，方程思想贯穿于初中数学学习的全过程。用方程思想解决几何问题，有效地简化了解决问题的过程。因此，教师要引导学生学会挖掘几何中隐含的方程思想，灵活多变的运用方程思想去解决几何问题。

参考文献

[1]冯东梅.方程思想在初中几何中的运用[J].数学学习与研究(教研版),2020(9):136.

[2]林锐利.方程思想在初中几何中的应用[J].新课程·中学,2018(10):56.