求函数零点问题的一类找点技巧
——趋势分析、确定主次、放缩转化

周剑

（四川省遂宁中学校　四川　遂宁　629000）

[摘　要]以2013年高考数学江苏卷第20题为例，对高考中常见的判断是否有零点或求零点个数问题的难点进行深入分析，并对解法进行一般性归纳、拓展，培养学生思维的灵活性和创造性。

[关键词]函数；零点；零点存在性定理；趋势；放缩

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6261.2021.04.1305

在高考中，判断函数是否有零点等问题是一类常见的题型。零点问题涉及的知识点多，对数学技巧和思想方法要求高，试题综合性强。高中阶段，根据零点存在性定理可知，要想找到连续函数f（x）在区间[a，b]上是否有零点，关键取决于能否找到恰当的a，b，使得f（a）f（b）<0成立。由于高中阶段的知识的局限性，学生很难找到符合条件的a，b。高考公布的答案，思维要求高，跨度大，学生虽然能看懂答案，却不知其所以然。一般参考书的答案中利用图像一笔带过，给出不严谨的证明。因此，本文以经典的2013江苏高考题为例，谈谈笔者的一些做法：解决求函数零点问题找点技巧的三板斧：趋势分析、确定主次，放缩转化

设函数 $f(x)=\ln x-ax$，$g(x)=e^x-ax$，其中 a 为实数。

（1）若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调减函数，且 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有最小值，求 a 的取值范围；

（2）若 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是单调增函数，试求 $f(x)$ 的零点个数，并证明你的结论。

我们该如何准确的找到符合题意的a，b呢？下面给出笔者的证明及思路。

证明方法：∵由题 $g'(x)=e^x-a\ge 0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，

$e^x\ge a$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，　$\therefore a\le\frac{1}{e}$，又 $f'(x)=\frac{1}{x}-a$

①当 $a=0$ 时，$f(x)=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 有且只有一个零点，即x=1

②当 $a<0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}-a>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增

（分析：由此可知f（x）在（0，+∞）至多只有一个零点，为了进一步说明存在一个零点，就要用零点存在定理，找到两个函数值异号的两个数 x_1，x_2，使得f（x_1）f（x_2）<0。显然，$x_1=1$，$f(1)=-a>0$，接下来找到 x_2 使得f（x_2）<0，结合图像知道，x_2 应该往小的方向去想，越接近于0越好，一般按以下方法来找，看趋势分析：首先，定义域是 $(0,+\infty)$，所以考虑当 $x\to 0$ 时，$\ln x\to-\infty, ax\to 0$，$\therefore f(x)\to-\infty$，第二步，看确定主次，既然 $x\to 0$ 时，$f(x)\to\infty$，那么是谁在主导这样的结果呢？显然是lnx，因此，ax在趋势变化过程中，不影响趋势的发展，我们可以想办法把它去掉，即进行第三步，放缩。怎么放缩呢？结合目标是找出 x_2，使得 $\ln x_2-ax_2<0$，可以对 $-ax_2$ 适度放大，使得 $\ln x_2-ax_2<g(x_2)$，只需要从 $g(x_2)<0$ 中解出 x_2 即可。我们可以利用多种方法对 $-ax$ 进行放缩。易得 $x\in(0,1)$，$-ax<-a$，所以 $\ln x-ax<\ln x-a<0$ 由此可以解得 $x<e^a$，所以可以取 e^a，从而取得 x_0。在整个放缩时要注意几个要求，一是方向要对，二是不等式可解，三是有时要人为加条件，四是注意精度。）

$\because f(1)=-a>0$　$f(e^a)=\ln e^a-ae^a=a(1-e^a)<0$ $\therefore f(x)$ 在（e^a，1）有且仅有一个零点

③当 $0<a\le\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}-a\ge 0$，$\therefore x\le\frac{1}{a}$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 增，$(\frac{1}{a},+\infty)$ 减，所以 $f(x)_{\max}=f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1$ $\because 0<a\le\frac{1}{e}$，$\therefore\frac{1}{a}\ge e$，$\ln\frac{1}{a}\ge 1$，

∴1）当 $a=\frac{1}{e}$ 即 $f(\frac{1}{a})=0$ 时，$f(x)_{\max}=0$，∴ $f(x)$ 有且仅有一个零点即x=e；

（类似a<0，可以找到对应构造的函数为 $u(x)=\ln x-\sqrt{x}$））

2）当 $0<a<\frac{1}{e}$ 即 $f(\frac{1}{a})>0$ 时，$f(x)_{\max}>0$

构造函数 $u(x)=\ln x-\sqrt{x}$，

$\therefore u'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$，∴u（x）在（0，4）增，在（4，+∞）减，$u(x)\le u(4)=2\ln 2-2<0\therefore\ln x\le\sqrt{x}$。（确实成立，所以继续往下，放缩找点，令 $f(x)=\ln x-ax<\sqrt{x}-ax\le 0$，解得 $x\ge\frac{1}{a^2}$，即当 $x\ge\frac{1}{a^2}$ 时，f（x）<0）

$\therefore f(\frac{1}{a^2})=\ln\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}<\sqrt{\frac{1}{a^2}}-\frac{1}{a}=0$，∴f（x）在 $(\frac{1}{a},\frac{1}{a^2})$ 有且仅有一个零点，

∴f（x）在（0，+∞）有两个零点。

综上所述，当 $a\le 0$ 或 $a=\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 的零点有1个，当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 的零点有2个.

由此，我们通过趋势分析、确定主次、放缩转化三板斧破解了高考函数中找函数零点的难点问题。

练习：1.（2017全国1卷）已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；（2）若 $f(x)$ 有两个零点，求a的取值范围.

参考文献

[1]刘彦永.提高核心素养 妙解高考真题[J].数学教学研究，2017，（5）.41-43，51.