关于线性规划算法的探讨

高爱平
（阳江职业技术学院　广东　阳江　529500）

[摘　要]本文主要研究线性规划的常用算法及其灵活的应用技巧，归纳总结相关知识点以利于热爱数学优化的学者的研究工作。

[关键词]线性规划；图解法；分支定界法；单纯形法；割平面法；匈牙利法
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6261.2021.05.429

自1947年G.B.Dantzig提出了用单纯形法求解一般线性规划问题之后，线性规划问题的研究日趋发展成熟，在理论上和实用中都有广泛深入的探索。随着应用的深入，为了解决随着而来的不同问题，求解线性规划的方法也在逐步被提出完善。对其进一步的了解，请参阅文献[1-4]。

1 数学模型

线性规划模型的一般形式：

目标函数 $\max(\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$　　（1-1）

$$\text{约束条件}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (=,\ge) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (=,\ge) b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (=,\ge) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0 \end{cases} \qquad (1\text{-}2)$$

$x_j (j = 1,2,\cdots,n)$ 为决策变量，c_j 为价值系数，a_{ij} 称为技术系数，b_i 称为限额系数，一般情况下 $n > m$。

实例1.某厂计划生产甲、乙两种产品。每生产一吨甲产品需消耗A原料2吨，B原料2吨，卖出可获利3万元；每生产一吨乙产品需消耗A原料3吨，B原料1吨，卖出可获利2万元。现有库存A原料14吨，B原料9吨，问应如何安排生产计划使该厂获利最多？

建立线性规划模型：设 x_1, x_2 分别表示计划甲、乙产品的产量（吨），用 $z = 3x_1 + 2x_2$ 表示利润，该计划问题可用数学模型表示为：

目标函数　$\max z = 3x_1 + 2x_2$

$$\text{满足约束条件}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14, \\ 2x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

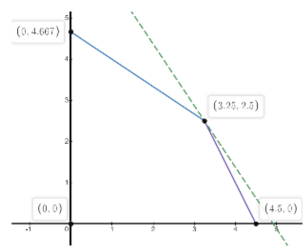
2 算法探讨

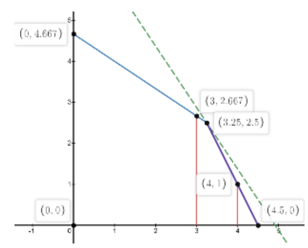
线性规划问题可将模型数据输入LINGO、Excel、Matlab、Mathematic等软件，进行计算机求解，本文则是专注于探讨手写计算，通过具体应用实施求解步骤。

2.1 图解法

图解法简单而局限，能通过图形直观了解线性规划问题求解的基本原理，但由于客观原因，通常能用图解法来解决只有两个决策变量的情形。

就上文“获利最多”模型示例图解法：如下左图作出可行域为四边形区域。平行移动虚线（斜率为 $-\frac{3}{2}$），当该直线通过点 $(\frac{13}{4},\frac{5}{2})$ 时，$z = 3x_1 + 2x_2$ 取得最大值 $\max z = \frac{59}{4}$。即该厂可计划生产甲产品3.25吨，乙产品2.5吨，这样能获得最大总利润14.75万元。





2.2 分支定界法

若要求 $x_j \ge 0$ 整数解，比如上述 x_1, x_2 的单位是“件”的时候，可用分支定界法优化，如上右图。

整数解的 $\max z$ 不超过原松弛问题的 $\max z = \frac{59}{4}$。

在 $3 < x_1 < 4$ 没有整数解，可行域缩小为以下两支：一支 $x_1 \le 3$，此时解得非整数最优解 $x_1 = 3$，$x_2 = \frac{8}{3}$，$\max z = \frac{43}{3}$；另一支 $x_1 \ge 4$，此时解得整数最优解 $x_1 = 4$，$x_2 = 1$，$\max z = 14$，符合要求。

2.3 单纯形法

基本思路：单纯形法是对增广矩阵作初等变换更换基变量，促使目标函数值优化的迭代方法。从单纯形表中寻找使目标函数增长最快（检验数最大正值）的非基变量入基，同时确保迭代后仍为可行解（最小比值）的基变量出基，直到目标函数中非基变量系数（检验数）为负，实现该顶点处取得最优解为止。

实例1求解步骤：先加入 x_3, x_4 两个松弛变量，使约束条件由不等式变为等式，将数学模型写成标准型：

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

这里的x_3,x_4表示没有被利用的资源，也没有利润，故在目标函数中其系数为零，即$c_3=c_4=0$。

用单纯形表求解最优解：$\max\{\sigma_j\}=\sigma_1=3$，

$\min\{\frac{b_1}{a_{11}},\frac{b_2}{a_{21}}\}=\frac{b_2}{a_{21}}=\frac{9}{2}$，则$a_{21}=2$为主元素，$x_1$入基，$x_4$出基，并将$\overline{P_1}$变为$(0,1)^T$。

cj			3	2	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x3	14	2	3	1	0	14/2
0	x4	9	[2]	1	0	1	9/2
检验数cj-zj			3	2	0	0	
0	x3	5	0	[2]	1	-1	5/2
3	x1	9/2	1	1/2	0	1/2	9
检验数cj-zj			0	1/2	0	-3/2	
2	x2	5/2	0	1	1/2	-1/2	
3	x1	13/4	1	0	-1/4	3/4	
检验数cj-zj			0	0	-1/4	-5/4	

又$\max\{\sigma_j'\}=\sigma_2'=\frac{1}{2}$，$\min\{\frac{b_1'}{a_{12}'},\frac{b_2'}{a_{22}'}\}=\frac{b_1'}{a_{12}'}=\frac{5}{2}$，则$a_{12}'=2$为主元素，$x_2$入基，$x_3$出基，并将$\overline{P_2'}$变为$(1,0)^T$。$\sigma_j''\le 0, j=1,2,3,4$，得到最优解$x^*=(\frac{13}{4},\frac{5}{2},0,0)^T$，$\max z=\frac{59}{4}$。

2.4 割平面法

若要求单纯形表中最终决策变量x_j取非负整数时（整数规划），可采用割平面法优化。

基本思路：首先不考虑变量是整数这一条件，求解相应松弛问题，若得到非整数型最优解，则增加线性约束条件，使原可行域只切割掉非整数解，保留其整数解，切割可能反复多次。本方法关键是找到这样的割平面，增加为约束条件后求出整数解。

实例1求解步骤：上文用单纯形法求得最优解不是整数解，需构造一个割平面方程。常规算法是将表中$x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4=\frac{5}{2}$各系数分解成整数部分（向下取整）与非负真分数之和，需要切割三次才能求得整数解。第一次，$x_2+\frac{1}{2}x_3+(-1+\frac{1}{2})x_4=2+\frac{1}{2}$，分离得割平面约束条件$x_2-x_4-2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4\le 0$，化为整式$-x_3-x_4\le -1$，引入松弛变量$x_5$构造割平面方程$-x_3-x_4+x_5=-1$，将该方程并入上述单纯形表最终结果得下表，用对偶单纯形法求解。

$b_3''=-1<0$，$\min\{\frac{\sigma_3''}{a_{33}''},\frac{\sigma_4''}{a_{34}''}\}=\frac{\sigma_3''}{a_{33}''}=\frac{1}{4}$，则$a_{33}''=-1$为主元素，$x_3$入基，$x_5$出基，并将$\overline{P_3''}$变为$(0,0,1)^T$。计算结果如下表：

cj			3	2	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x2	2	0	1	0	-1	1/2
3	x1	7/2	1	0	0	1	-1/4
0	x3	1	0	0	1	1	-1
检验数cj-zj			0	0	0	-1	-1/4

仍是非整数解，需第二次割平面，结果如下表：

cj			3	2	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x2	5/3	0	1	0	-1	0	1/6
3	x1	11/3	1	0	0	1	0	-1/12
0	x3	5/3	0	0	1	1	0	-1/3
0	x5	2/3	0	0	0	0	1	-1/3
检验数cj-zj			0	0	0	-1	0	-1/12

仍是非整数解，需第三次割平面（略）。最终得到整数解$x_1=4$，$x_2=1$，$\max z=14$。

本文再介绍割平面一次就能求得整数解，将表中$x_1-\frac{1}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4=\frac{13}{4}$各系数分解成整数部分（向上取整）与非负真分数之差，有$x_1-\frac{1}{4}x_3+(1-\frac{1}{4})x_4=4-\frac{3}{4}$，分离得割平面约束条件$0\ge\frac{3}{4}-(\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4)=4-x_1-x_4$，化为整式$-x_3-x_4\le -3$（换算成$x_1,x_2$可表示为$x_1+x_2\le 5$）。引入松弛变量$x_5$构造割平面方程$-x_3-x_4+x_5=-3$，将该方程并入上述单纯形表最终结果得下表，用对偶单纯形法求解。

$b_3''=-3<0$，$\min\{\frac{\sigma_3''}{a_{33}''},\frac{\sigma_4''}{a_{34}''}\}=\frac{\sigma_3''}{a_{33}''}=\frac{1}{4}$，则$a_{33}''=-1$为主元素，$x_3$入基，$x_5$出基，见下表：

cj			3	2	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x2	5/2	0	1	1/2	-1/2	0
3	x1	13/4	1	0	-1/4	3/4	0
0	x5	-3	0	0	[-1]	-1	1
检验数cj-zj			0	0	-1/4	-5/4	0
2	x2	1	0	1	0	-1	1/2
3	x1	4	1	0	0	1	-1/4
0	x3	3	0	0	1	1	-1
检验数cj-zj			0	0	0	-1	-1/4

得到最优整数解$x_1=4$，$x_2=1$，$\max z=14$。

2.5 匈牙利法

整数规划中还有一类特殊的0-1规划（指派问题）。已知

指派问题对应的系数矩阵，其元素$c_{ij}>0\ (i,j=1,2,\cdots,n)$表示指派第$i$个人去完成第$j$项任务时的效率（或时间、成本等），求解主要采用匈牙利法。

数学模型：引入决策变量x_{ij}，只取值0或1：

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当指派第}i\text{个人去完成第}j\text{项任务}\\ 0, & \text{当不指派第}i\text{个人去完成第}j\text{项任务}\end{cases}$$

目标函数：$\min z=\sum_i\sum_j c_{ij}x_{ij}$

满足约束条件 $\begin{cases}\sum_i x_{ij}=1, j=1,2,\cdots,n\\ \sum_j x_{ij}=1, i=1,2,\cdots,n\\ x_{ij}=0\text{或}1.\end{cases}$

实例2.求已知系数矩阵指派问题的最小解。

人员	任　务				
	A	B	C	D	E
甲	12	7	9	7	9
乙	8	9	6	6	6
丙	7	17	12	14	9
丁	15	14	6	6	10
戊	4	10	7	10	9

求解步骤：（1）首先按最小原则将系数矩阵作变换，从每行（列）元素减去该行（列）的最小元素，使各行各列中都出现0元素，对最小解有利。经一次行运算即得符合要求的系数矩阵：

$$\left[\begin{array}{ccccc}12&7&9&7&9\\8&9&6&6&6\\7&17&12&14&9\\15&14&6&6&10\\4&10&7&10&9\end{array}\right]\begin{array}{c}7\\6\\7\\6\\4\end{array}\quad\xrightarrow{(1)}\begin{bmatrix}5&0&2&0&2\\2&3&0&0&0\\0&10&5&7&2\\9&8&0&0&4\\0&6&3&6&5\end{bmatrix}$$

（2）然后进行试指派，寻求最优解。按照选择多的要“礼让”选择少的原则，先从只有一个0元素的第三行（或第五行）开始，将这个0元素选中圈为◎，表示丙只有任务A可指派，然后将◎所在第一列的其他0元素标记为Ø；将只有一个0元素的第二列0元素选中圈为◎，表示任务B指派给甲，不再考虑他人，然后将◎所在第一行的其他0元素标记为Ø 。再从剩有两个0元素的第四行开始进行，直到所有0元素都标记为止。

$$\xrightarrow{(2)}\begin{bmatrix}5&\circledcirc&2&\varnothing&2\\2&3&\varnothing&\circledcirc&\varnothing\\\circledcirc&10&5&7&2\\9&8&\circledcirc&\varnothing&4\\\varnothing&6&3&6&5\end{bmatrix}\quad\xrightarrow{(3)}\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccccc}5&\circledcirc&2&\varnothing&2\\2&3&\varnothing&\circledcirc&\varnothing\\\circledcirc&10&5&7&2\\9&8&\circledcirc&\varnothing&4\\\varnothing&6&3&6&5\end{array}\right]\begin{array}{c}-\\-\\\surd\\-\\\surd\end{array}\\\surd\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\end{array}$$

（3）此◎元素的个数$m=4$少于矩阵的阶数$n=5$，试指派未完成，则作最少直线覆盖以固定现所有0元素。先在没有◎的第五行旁边打√，在第五行中含Ø元素的第一列下打√号，在第一列中含◎元素的第三行旁边打√，经检查不再能在打√了。对没有打√的第一二四行，画一直线以覆盖0元素，对已打√的第一列画一直线以覆盖0元素。

（4）得最少直线数$l=4<n$，可对上述矩阵进行变换以增加0元素。在没有被直线覆盖的其余元素中找出最小元素2，然后在打√处行减列加最小元素2，得未覆盖区域有新增0元素的系数矩阵。

$$\xrightarrow{(4)}\begin{bmatrix}7&\circledcirc&2&\varnothing&2\\4&3&\varnothing&\circledcirc&\varnothing\\\varnothing&8&3&5&\circledcirc\\11&8&\circledcirc&\varnothing&4\\\circledcirc&4&1&4&3\end{bmatrix}\quad\xrightarrow{\text{解}}\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

再经试指派，圈出5个独立的◎元素，对应解矩阵(x_{ij})中的元素为1，其余为0，这就是相应的解矩阵。于是最优指派方案是：甲$\to B$，乙$\to D$，丙$\to E$，丁$\to C$，戊$\to A$，$\min z=32$。

本文通过对线性规划问题的基本模型与模型的常用求解方法进行研究，探讨了这类优化问题的分析思路和解决方案。发展到现在，线性规划问题除了经典算法之外，还有遗传算法、神经网络、智能计算等新方法，研究线性规划的算法及其灵活的应用技巧，对理论的完善和实际问题的解决都是有积极推动作用。

参考文献

[1]阮国桢.线性规划基线算法的基本概念[J].计算数学，1999（11），21（4）：441-450.

[2]彭跃辉，阮国桢，朱书尚.线性规划的原始基线算法[J].邵阳学院学报（自然科学），2003（2），2（2）：20-24.

[3]曾梅清，田大钢.线性规划问题的算法综述[J].科学技术与工程，2010（1），10（1）：152-159.

[4]钱颂迪.运筹学[M].第四版.北京：清华大学出版社，2015.

基金项目：2019年广东省数学会高职高专教师教育科研项目（编号：GDGZSX2019010）；阳江职业技术学院教改项目（编号：2019yzjgyb05）

作者简介:

高爱平（1972-），女，民族：汉，籍贯：湖北黄冈，学历：本科，职称：讲师，研究方向：数学分析，高等数学