

基于直观想象素养培养的高中立体几何模型课探究

戴敏娜 邹贱妮 钟琴玲

(广州彭加木纪念中学 广东 广州 510430)

[摘要]立体几何是高中生学习的一大难点,大部分高一学生对立体几何的学习存在障碍,原因是缺乏空间想象能力。空间想象是直观想象的内涵之一,是高中生必须具备的核心素养。提高学生的空间想象能力,首先要帮助学生建立“空间感”,利用“典例模型”分析几何体的结构,形成立体几何知识网络。从而培养学生识图、作图、用图的能力,加强逻辑推理训练,提高思维和空间想象的敏捷性。立体几何模型课由学生利用最简单的材料搭建立体模型,自由地添加“辅助线”,认识几何体的空间结构,线面的投影关系等,达到提高学生“空间感”的目的。

[关键词]空间想象能力;立体几何模型;“模型”课例

[DOI] 10.12252/j.issn.2096-6261.2021.06.601

一、高中立体几何学习的思维特点

数学的学习是人脑中的思维活动,几何是对几何体、图形的关系和量的关系的研究。几何体是舍弃了物体的物质属性而仅从它的空间形式的观点加以考虑的数学对象。几何体构成的基本元素是点、线、面,是“纯粹形式”,只用直觉思维和逻辑推理的方式从一些结论中推导出新的结论。几何直观是一种“思想实验”,直观和逻辑、推理和证明是几何的“内在之物”,学生只有建立了几何体的空间表象,认识其结构、图形关系才可以进一步操控图形编码,形成以图形为工具的数学技能。

数学技能的形式除了要直观感知,更需要实践操作。新课标要求立体几何的学习遵循“直观感知——操作确认——思辨论证——度量计算”四个层次的认识过程展开。尤其强调调用“模型”促进教学,重视学生的学习经历和学习体验。立体几何相比平面几何,其结构性更复杂。若能让学生经历几何体的建构过程,认识几何体的空间结构,那么立体几何的学习将会更得心应手。

二、立体几何模型对学生学习立体几何起促进作用

从高考改革以及2021年新高考数学试题来看,由于文理合卷,立体几何的考核更注重对几何图形的把握,考核学生的几何直观能力。如2021年全国高考2卷第10题,考察正方体中的投影的问题,2021年全国高考1卷12题动态几何问题,都离不开对几何体结构的把握,对几何体中线面位置关系的判断。

目前学生学习立体几何主要的问题在于看图能力,不能从图形中分析几何体的结构特点。因为几何体存在于三维空间中,而在书本或黑板上呈现出来的图形其在二维空间的表达,某些线面关系会发生“畸变”。传统的立几课堂作图能力的培养往往被忽略(高考不考作图),在学生建立“空间感”的过程中,“实物模型”与“直观图”的对照是十分重要的一个环节。学生往往会有一种感觉,立几中的公理定理不是客观存在的,仿佛是老师“编造”出来的。他们不能说服自己这种空间关系是客观存在的,能在现实中找到“原型”的。例如:异面直线的垂直问题、线面平行、面面平行的问题,在图中并不“垂直”和“平行”。但是在模型中呈现出来,就是真实的形象,学生能直观感知这种位置关系,承认它们的客观存在性。所以用“模型”促进学习十分有必

要。

三、立体几何模型课例研究

启发式的数学教学,提出教师要帮助学生建立完备的数学知识体系,做到“学思结合”学生自身的实践活动是有效学习的关键。建构主义的教学观认为学生是学习的主体,强调学生应在具体情境中学习,而不是被动地接受结论。结合新课标的要求数学的课堂教学应该注重知识的形成过程,而不是像以往一样“结论——例题——大量练习”的教学模式。

立体几何模型引入立几课堂学习,旨在让学生动手操作,直观感知模型构建的过程。通过观察模型得出直观的空间位置关系,再进一步研究如何根据公理和定理证明线线、线面的关系。根据本校学生的情况,编写课例,适当地减少知识点,分解观察任务,降低新课的难度。模型课的课堂模式为“观察任务——构建模型——作出直观图——得出结论——例题——练习”,现以《直线与平面垂直》为例。

本节课在立几教学中是十分重要的一节课,是线面垂直、几何体体积、线面角、面面角以及建立空间直角坐标系的基础。因为“高”的存在,几何体能“立”起来。本节课的重要思想是“线线垂直 \longleftrightarrow 线面垂直”的相互转化。

课前材料准备:竹筷子、吸管(筷子可以套入吸管中)、黏土、卡纸、固定的几何体模型。学生4人或6人一组,课例学案。

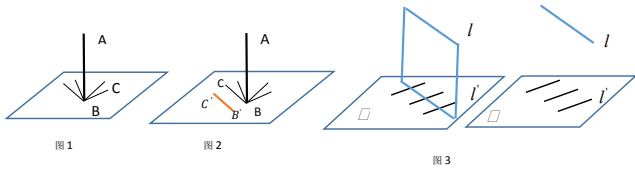
观察任务1:旗杆AB立在地面上,BC是它的影子,观察随着时间的变化,影子BC的位置不断变化,AB与BC是否一直保持垂直?

建构模型:在卡纸上竖起旗杆AB(筷子),用黏土固定,吸管BC是它的影子。增加“BC”模拟影子不同位置如图1所示,直线AB与BC是否垂直,作出直观图。

观察任务2:旗杆AB与地面上不过点B的直线 $B'C'$ 是否垂直?理由是?

建构模型:添加直线(吸管固定在卡纸上),直观感受异面直线垂直的位置关系,作出图形,由于 $//BC$,所以AB。

建构模型:添加直线 $B'C'$ (吸管固定在卡纸上),直观感受异面直线垂直的位置关系,作出图形,由于 $B'C' // BC$,所以 $B'C' \perp AB$ 。



概念总结：（利用反例辨别概念）

讨论：1、如果直线 l 垂直于平面 α 内无数条直线，那么直线 l 与平面 α 垂直？

如果直线 l 垂直于平面 α 内任何一条条直线，那么直线 l 与平面 α 垂直？

请同学们讨论一下哪一种情况可以得出直线 l 与平面 α 垂直，可以用模型展示，也可以直接作图表示。

建构模型：讨论问题1作为线面垂直定义的反例，可引导学生建构模型得出“无数”

与“任意”的区别，部分空间感较好的学生可以直接作出图形解析，如图2以及图3。反例与正例的位置区别，模型能给出较为深刻直观印象。

直线与平面垂直的概念：

文字语言：一般地，如果直线 l 与平面 α 内任意一条直线都垂直，那么我们说直线 l 与平面 α 互相垂直。

符号语言：若任意 $a \in$ 平面 α , $l \perp a$, 则 $l \perp$ 平面 α 。

图形语言： 引出垂线，垂面，垂足的概念形成数学对象，把图形编码概念化。

概念的延伸：

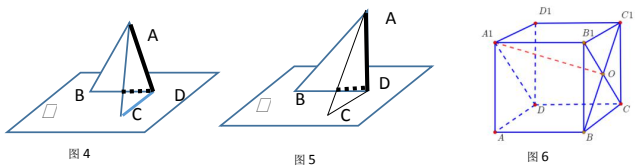
观察任务3：在同一平面中，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直，这一个结论可以推广到空间吗？空间中，过一点与已知的平面垂直的直线有几条？

建构模型：黏土作为平面外的一个点，通过建构模型得出过平面外一点有且只有一条直线垂直于已知平面。可进一步引导学生证明（利用反证法）

直线与平面垂直的判定定理的探究：

观察任务4：若根据直线与平面垂直的定义判断直线与平面垂直需要验证直线与平面内所有直线都要垂直，这显然不可行，那么有什么方法可以判定直线与平面垂直？

建构模型：对比斜线与垂线，用硬卡纸剪出 $\triangle ABC$ ，过点A翻折纸片，得出折痕AD，把翻折后的纸片放在另一张硬卡纸上。AD与BC的位置关系如何，才能使AD垂直于平面 α ？



由模型观察得出，直线 l 与平面垂直需要垂直于平面 α 内两条相交直线如图4，图5。

定理总结：文字语言，符号语言，图形语言。

例题：

例题1：如果两条平行直线中的一条垂直于平面，那么另

一条也垂直于这个平面。

建构模型：通过观察模型，联系判定定理，得出证明方法。需把文字语言转化为符号语言，重点是在平面 α 中找出两条相交直线。本题是“线 \perp 线” \longleftrightarrow “线 \perp 面”相互转化的初步应用。

例题2：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中如图6，

(1) 求证： $BC_1 \perp$ 平面 A_1DCB_1 ； (2) 若 $BC_1 \cap BC_1 = O$, 求证 $BC_1 \perp A_1O$ 。

建构模型：在典例模型中研究线面垂直，学生拿出已经搭建好的正方体模型（材料是筷子），在上面添加辅助线（吸管）。观察方位改变后，直线与平面垂直的位置关系。引导学生在平面 B_1CDA_1 中寻找与 B_1C 垂直的直线，得出线面垂直后得出线线垂直。这道例题的关键是让学生通过观察模型判断出线线、线面的垂直关系。尤其是异面直线的垂直问题，由线面垂直得出线线垂直的关系。

例题后思考：从模型上观察在平面 A_1DCB_1 中，是否任意作一条直线都能与直线 BC_1 垂直？在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，还有哪条直线与平面 B_1CDA_1 垂直？这些直线与直线 BC_1 有怎样的位置关系？可以在图形中表示出来吗？

四、总结与展望求题问题

用模型引入立体几何课堂教学是符合学生的认知需求和学习心理需求的，模型的直观视觉感受是图形不能代替的，先有模型后有图形这才符合几何的学习规律。用模型研究，用图形表达，再逻辑推理证明有利于学生深入地研究立体几何，增加学习兴趣。以后能脱离模型，在直观图中判断线面的位置关系。但是立几课堂上的模型材料是比较匮乏的，用筷子，吸管，黏土搭建出来的模型比较粗糙，希望往后有更好的材料便于搭建立体几何模型，帮助学生更好地学习和研究立体几何。

参考文献

- [1] 曹才翰, 章建跃. 数学教育心理学 (第3版). 北京师范大学出版社
- [2] 《空间想象能力进阶》编写组. 空间想象能力进阶. 哈尔滨工业大学出版社
- [3] 马蔼琳. 高中生立体几何学习障碍及对策的研究. 上海师范大学. 2011年4月
- [4] 周正宏. 立体模型在高中立体几何教学中的合理运用. 新课程 (下) 2019-05-28
- [5] 韩艺通. 浅谈模型化思想在高中数学中的应用-以高三立体几何复习为例. 理科爱好者 (教育教学). 2021-02-10

作者简介：

第一作者：戴敏娜，女，汉，籍贯：番禺，任职广州彭加木纪念中学，中学数学一级教师，学士学位，研究方向：学生学习数学的思维形成过程以及学习心理学，立体几何模型教学，高中数学通性通法。

基金项目：[本文是广州市教育科学规划2019年度课题“直观想象素养下的高中数学教学实践研究”（课题编号：201912008）阶段性研究成果。]