# 浅谈数学分析课程对学生归纳能力的培养
## ——以辅助函数的应用为例

邓小青　陈建文　张健
（湖南工商大学理学院　湖南　长沙　410205）

[摘　要]数学分析课程内容体系庞大，思想深邃，方法多样，技巧精妙，学生上课能听懂下课解题不知所措，缺乏归纳总结是原因之一。本文结合辅助函数应用实例，有效引导学生归纳总结辅助函数的不同构造方法。

[关键词]数学分析；辅助函数；归纳能力
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6261.2021.06.141

“只见树木，不见森林”或“不识庐山真面目，只缘身在此山中”都是数学分析课程“从厚到薄”工作尚未完成的写照，“先读厚再读薄”实际上是微观到宏观学习数学分析课程的历程。“读厚”的目的是深刻全面掌握知识点，即首先联系实例或背景理解基本概念和基本知识点，然后不断地练习巩固，使用多种技巧或思路，掌握数学分析的思想和方法，最后是应用基本概念、基本知识点和基本思想方法去解决实际问题。“读薄”的目的是归纳总结，理清线索，融会贯通。培养学生归纳总结能力，不仅需要学生积极独立思考，而且需要教师正确引导。

构造辅助函数法是解决数学分析问题的一种重要方法，它是一种将数学问题化难为易的方法，是研究数学问题的一个有力工具。“要不要构造辅助函数和如何构造辅助函数”是教学的重点和难点，在教学中正确引导学生归纳总结辅助函数的构造方法，从而提高归纳总结能力，提升数学素养。

### 1 辅助函数主要构造方法归纳

#### 1.1 依据微分中值定理构造辅助函数

情形1　要证明至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得$f(\xi)=0$，如果能构造某个辅助函数使$F'(x)=f(x)$且$F(x)$在$[a,b]$上满足罗尔中值定理，那么问题就迎刃而解。

例1 设函数$f(x)$ $g(x)$在$[a,b]$连续，证明：至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得

$$g(\xi)\int_a^{\xi} f(x)dx=f(\xi)\int_{\xi}^{b} g(x)dx.$$

分析：构造辅助函数$F(x)=\int_a^x f(t)dt.\int_x^b g(t)dt,x\in[a,b]$，对$F(x)$使用罗尔定理可得。

情形2　要证明$F(x)\equiv F(a),x\in[a,b]or[b,a]$，只需考虑$F(x)$在$[x,a]or[a,x]$满足拉格朗日中值定理。

例2　证明：$2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi,x\geq 1.$

分析：取辅助函数$F(u)=2\arctan u+\arcsin\frac{2u}{1+u^2},u\in[1,x]$，利用拉格朗日定理得证。

情形3　要证明$d_1(x)\leq\frac{F(x)-F(a)}{x-a}\leq d_2(x)$，只需证明$d_1(x)\leq F'(\xi)\leq d_2(x),\xi\in[a,x]or[x,a]$。

例3　证明：$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x,x>0.$

分析：构造辅助函数$F(u)=\ln(1+u)$，$u\in[0,x]$，利用拉格朗日定理得证。

情形4　要证明形如$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$的某些等式，可以利用柯西中值定理构造辅助函数.

例4　设函数$f(x)$在$[a,b],a>0$上连续，在$(a,b)$内可导，证明：至少存在一点

$\xi\in(a,b)$使得$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\mathrm{h}\ \frac{b}{a}$。

分析：所证等式变形为$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{1/\xi}$，构造辅助函数$g(x)=\ln x$，只需对函数$f(x)$和$g(x)$使用柯西中值定理即可。

情形5　证明形如$f(x)>g(x)$的不等式，可以考虑依据柯西中值定理构造辅助函数。

例5 证明不等式$\tan x>x+\frac{x^3}{3},0<x<\frac{\pi}{2}$.

分析：构造辅助函数$f(x)=\tan x,g(x)=x+\frac{x^3}{3},0<x<\frac{\pi}{2}$，两次利用柯西中值定理即可证明。

#### 1.2　依据零点定理构造辅助函数

数学分析中有些等式的证明问题或方程的根的存在问题可以转化为某个辅助函数的零点存在问题。

例6 已知函数f(x)在[0, 1]上非负连续，且 $f(0)=f(1)=0$，证明：对任意实数 $a$

$(0<a<1)$，至少存在一点 $\xi\in[0,1]$ 使得 $\xi+a\in[0,1]$ 且 $f(\xi)=f(\xi+a)$。

分析：构造辅助函数 $F(x)=f(x)-f(x+a)$ 在 $[0,1-a]$ 上使用零点定理即可证明。

1.3 依据单调性构造辅助函数

证明不等式的方法很多，其一是利用某个辅助函数的单调性加以证明。

例7 证明：$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x},x>1.$

分析：构造辅助函数 $F(x)=2\sqrt{x}-3+\frac{1}{x}$，利用导数证明其在 $[1,+\infty)$ 上单调增加即可。

1.4 依据凹凸性构造辅助函数

数学分析中有些不等式可以利用某个辅助函数的凹凸性证明。

例8 证明：$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>(\frac{x+y}{2})^n,x>0,y>0,x\neq y,n>1.$

分析：构造辅助函数 $F(t)=t^n,t>0,n>1$，由于它在 $(0,+\infty)$ 上是凹的，利用凹函数的定义即可证明得到。

1.5 依据最值或极值构造辅助函数

数学分析中有些不等式可以利用对应的辅助函数的极值或最值加以证明。

例9 证明不等式 $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}(x\neq 0)$

分析：构造辅助函数为 $F(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})+1-\sqrt{1+x^2}$，由于 $F''(0)>0$，于是该函数在 $x=0$ 取得极小值，从而证明上述不等式。

1.6 依据含参变量积分构造辅助函数

学习分部积分求定积分时，会碰到一种特殊的含参变量积分，可以使用递推公式得到该含参变量积分的表达式，根据这个表达式我们进一步证明其他结论。

例10 证明Wallis公式 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}$.

证明：构造辅助函数 $I(n)=\int_0^{\pi}\sin^n xdx$，通过一次分部积分（u=sin$^n$x, v=cosx）

计算得到 $I(n)=(n-1)I(n-2)-(n-1)I(n)$，

即 $I(n)=\frac{n-1}{n}I(n-2)$，又 $I(0)=\pi,I(1)=2$，

所以 $I(2n)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi,I(2n+1)=\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!}$。

由于 $I(2n+1)<I(2n)<I(2n-1)$，

从而有 $1<\frac{\frac{\pi}{2}}{(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2\frac{1}{2n+1}}<1+\frac{1}{2n}$，

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2\frac{1}{2n+1}}=1$，

再用极限的四则运算得到所证结论。

## 2 辅助函数其他构造方法归纳

当然，除上述构造法外，辅助函数还有其他的构造方法。比如，数学分析中讨论某些数列的极限可以借助某个辅助函数的连续性；讨论函数极限，可以使用定积分定义计算，即把极限转化为某个辅助函数在某区间上的定积分；讨论某个近似值可以通过合适的辅助函数在某点的增量约等于该点的微分来加以计算；讨论某些导数或积分时，也可借助合适辅助函数的导数或积分，特别处理积分时，辅助函数甚至是含参变量积分函数；讨论积分问题时，换元法实际上是借助辅助函数变换积分变量；讨论条件极值问题实际上是以拉格朗日函数为辅助函数。

## 3 总结

构造辅助函数能轻松解决数学分析中很多问题，这里的总结当然并不是最完善的，但是通过引导学生这样归纳总结，学生就能系统地掌握一元函数的极限、连续、微分和积分、微分中值定理和导数的应用等。

## 参考文献

[1]华东师范大学数学科学学院.数学分析（第五版上册）[M].北京：高等教育出版社，2019.

作者简介:

邓小青（1974.9-）女，汉，湖南省武冈市人，湖南大学数学学院2003级应用数学博士研究生，湖南工商大学理学院副教授，主要研究方向为：离散动力系统

[基金项目]：1、湖南省《数学分析》一流课程项目，湖南省教育厅湘教通（2020）322号

2、数据科学与大数据专业课程思政教育的探索与实践，湖南省教育厅项目（HNKCSZ- 2020-0399）

3、湖南省《算法导论》一流课程项目，湖南省教育厅湘教通（2020）322号