觅模型 重通性 用通法 提素养

——基于2016年成都中考压轴题的探究

肖红学

（湖北省潜江市刘岭中学，湖北　潜江　433100）

[摘　要]数学问题的生成一般都是有基本模型为指导的，如果老师在教学过程中自然地引导学生探究，在无形中提升学生的数学核心素养。让学生在问题中自然探究、缓步前行，从而提升学生分析问题和解决问题的能力。

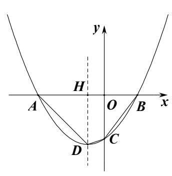
[关键词]抛物线；直角；模型

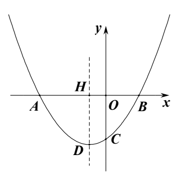
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6261.2021.07.894

一、试题呈现

（2016成都第28题）如图，在平面直角坐标系xOy中，抛物线 $y=a(x+1)^2-3$ 与x轴交于A、B两点（点A在点B的左侧），与y轴交于点C（0，$-\frac{8}{3}$），顶点为D，对称轴与x轴交于点H，过点H的直线l交抛物线于P、Q两点，点Q在y轴的右侧。

（1）求a的值及点A、B的坐标；（2）当直线l将四边形ABCD分为面积比为7：3的两部分时，求直线l的函数表达式；（3）当点P位于第二象限时，设PQ的中点为M，点N在抛物线上，则以DP为对角线的四边形DMPN能否成为菱形？若能，求出点N的坐标；若不能，请说明理由。





这道题最难的部分在第（3）问，解决第（3）问的核心和关键在于学生要知道这里有一个固定的结论：过点H的任何一条直线l交抛物线于P、Q两点，∠PDQ都是90°.如果学生知道这个结论，第（3）问就迎刃而解了.

二、模型探究

（一）基础模型探究

已知抛物线$y=ax^2$，在y轴上有一点A（0，h），过点A的直线交抛物线$y=ax^2$于B，C两点，当∠BOC是直角时，请探索h与a的关系.

结论：$h=\frac{1}{a}$

解答：如图，分别过点B，C作x轴的垂线，

由△BDO∽△OEC，得：$\frac{BD}{OE}=\frac{DO}{EC}$，

设B(m, am^2), C(n, an^2), 得：$\frac{am^2}{n}=\frac{-m}{an^2}$，

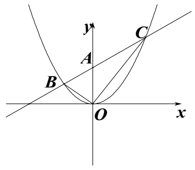
化简得：$a^2mn=-1$，①

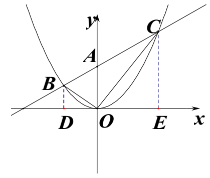
设$y_{BC}=kx+h$, 由：$\begin{cases} y=ax^2 \\ y=kx+h \end{cases}$ 得：$ax^2-kx-h=0$，

可得：$mn=-\frac{h}{a}$，②

将②带入①得：ah=1，

所以：$h=\frac{1}{a}$



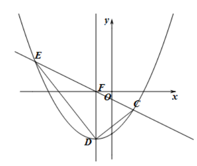


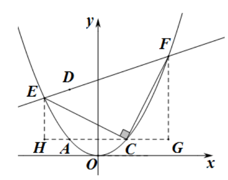
也就是说：对于顶点在原点的抛物线，如果将顶点向上（a＜0时向下）移动$\frac{1}{|a|}$个单位得到一个新的点，过这个点作任意一条直线与抛物线交于两点，这两点与顶点所形成的三角形是以顶点为直角顶点的直角三角形。

（二）模型初步延伸

对于任意抛物线$y=ax^2+bx+c$,顶点为D，如果过对称轴与x轴的交点的任意直线交抛物线于点E，C两点，在a，b，c满足什么条件时，∠EDC始终是直角？

解答：由问题1可知，只要线段DF的长等于$\frac{1}{a}$即可，即：$-\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{1}{a}$，化简得：$4ac-b^2+4=0$，所以，当a，b，c满足$b^2-4ac=4$时，∠EDC始终是直角。





（三）模型终极呈现

如图，对于抛物线上任意一点C，找到这一点关于对称轴对称的点A，然后再将这个对称点向上移动$\frac{1}{a}$个单位(a＜0时向下移动$\frac{1}{|a|}$)得到点D，过点D的任意直线和抛物线会产生两个交点E，F，此时，∠ECF一定是直角.

解答：如图作辅助线，易知△EHC∽△CGF，

可以得出结论：$\frac{EH}{CG}=\frac{HC}{GF}$

设E(x_1，ax_1^2)，F(x_2，ax_2^2)，C(t，at^2)，D(m，n).

对于抛物线上任意一点C，找到这一点关于对称轴对称的点A，然后再将这个对称点向上移动$\frac{1}{a}$个单位(a＜0时向下移动$\frac{1}{|a|}$)得到点D，过点D的任意直线和抛物线会产生两个交点E，F，此时，∠ECF一定是直角。

三、结束语

数学模型是一类典型题目本质特征的抽象化概括，老师要先研究清楚各类模型的通性和通法，在教学过程中才能很好的应用一个好的例题引导学生去探索。好的例题可以让学生既见树木又见森林，让学生能够看清解一类题的常规思路、思维上的难点和隐藏的结论，达到“悟一点，会一类，通一片”效果。

参考文献

[1]许银银.恰到好处:谈综合题命制中的增加层次 ——以2016年四川成都卷第28题为例[J].《中学数学》2016年20期