

一题多解、一题多变之 解三角形之周长、面积的最值(范围)问题案例研究

庞业媛

(贵州省铜仁市第八中学, 贵州 铜仁 554300)

[摘要]《关于全面深化课程改革落实立德树人根本任务的意见》, 提出各学段学生要发展核心素养体系, 核心素养不仅体现在外显能力, 还体现内在是思维品质。一题多变, 一题多解体现了数学核心素养的数学运算能力, 直观想象能力、数学抽象能力和数学推理能力, 能够提升学生的思维能力。

[关键词]核心素养; 一题多变; 一题多解; 数学核心素养; 思维能力

[DOI] 10.12252/j.issn.2096-6261.2021.07.875

引言

一题多解是要培养学生的求异思维和发散思维, 使学生学会多角度分析和解决问题, 而多解归一, 可以加深学生对数学原理、通性通法的认识, 提高解题技巧与能力。一题多解可以开阔学生思路、发散学生思维, “一题多解”“一事多写”“一物多用”等方式都属于发散思维, 它表现为思维视野广阔, 思维呈现出多维发散状。发散思维是创造性思维的最主要的特点, 是测定创造力的主要标志之一。一题多变是对题目更深层次的思考, 适当引导学生思考, 如何对题目变形, 对学生的数学思维的培养也有很大的帮助。下面以探讨解三角形之周长、面积的最值(范围)问题教学设计为例, 如何在教学中一题多解, 一题多变, 让学生的思维能力得到提升。

一、提出问题

1. 何为解三角形? 一般地, 把三角形的三个角A, B, C和它们的对边a, b, c叫三角形的元素. 已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫解三角形。

2. 高考中常见的解三角形题型是哪些?

二、考情分析

解三角形常以解答题的形式出现, 有以下命题规律:

1. 已知三角形中的边角求其余边角或面积, 如2020年高考全国III卷文数11;

2. 利用正余弦定理解平面图形, 如2019年高考浙江卷;

3. 已知三角形的边角条件解三角形, 如2019年高考全国I卷文数;

4. 以解答题形式考查利用正余弦定理解三角形范围问题, 如2019年高考全国III卷文理数、2020年高考全国II卷理科数;

5. 正弦定理、余弦定理在实际问题中的应用, 如2020年高考山东卷15.

三、例题讲解

题型一: 与周长有关的最值(范围)问题

【例1】(2020全国II卷理17改编) $\triangle ABC$ 的内角A, B, C的对边分别为a, b, c,

且满足 $a=2$, $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \sin B \sin C$.

(1) 求角A的大小;

(2) 求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

解: (1) 由题设及正弦定理得:

$$b^2 + c^2 - a^2 = bc;$$

由余弦定理得,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$$

又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 本题有两种解法, 方法如下:

(方法一) 由余弦定理得:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

所以 $4 = (b+c)^2 - 3bc$;

$$\text{由 } bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2,$$

$$\text{得 } (b+c)^2 \leq 4 + 3\left(\frac{b+c}{2}\right)^2,$$

解得 $b+c \leq 4$,

当且仅当 $b=c=2$ 时等号成立.

所以 $a+b+c \leq 6$.

所以 $\triangle ABC$ 周长的最大值为6.

(方法二) 本题(2)除了用上述解法还可以数形结合, 画出三角形即外接圆, 圆的弦长所对圆周角不变, 即一条边a及其对角A不变, 移动点A, 由图可知, 当A为圆的最高点时, 边长 $a=b=c$ 相等时, 即这个三角形为等边三角形时, 周长达到最大。

该题体现了一题多解, 使学生多思考多表达.

小结:

1. 该题的解题思路是什么? 本题第一问利用正弦定理和余弦定理求解问题; 本题第二问可利用余弦定理构造的等式, 结合基本不等式构造不等关系求得最值。

2. 该题需要注意什么? 基本不等式的适用条件及等号成立的条件。

本题(2)还可以进行以下变式:

【变式1】将“求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.”改为“求 $\triangle ABC$ 周长的范围.”

题型二: 与面积有关的最值(范围)问题

【变式2】将“求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.”改为“求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.”

【变式3】将“求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.”改为“若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

这里体现了一题多变, 深度由浅到深, 层层递进, 引发学生思考, 在其他数学学习方面“题目的解答还有吗? 是最优解吗?”, “这道题还可以怎么变?” 如果是我自己出题, 我会怎么出?

四、链接高考

(2019全国卷III) $\triangle ABC$ 的内角A, B, C的对边分别为a,

b, c, 已知 $a \sin \frac{A+C}{2} = b \sin A$, (I) 求B; (II) 若 $\triangle ABC$

为锐角三角形, 且 $c=1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

六、课堂小结(学生填写, 对做题产生的疑问和易错点进行整理记录)

结束语

总之, 在高中数学教学中, 教师要重视一题多解, 一题多变, 激发学生对高中数学的兴趣, 还能激发他们思维的创新性, 让他们在不断对数学知识深入研究的过程中形成一定的数学素养. 在让学生独立解决问题的过程中, 要让他们感觉到学习是自己的事情, 为了提高自己不断努力, 使自己成为具备较高水平的人才, 为以后的学习和工作打好基础。

参考文献

[1] 褚领群. 一题多解与一题多变拓展学生思维能力的尝试[J]. 求知导刊, 2021.