源于课本，搭好台阶，逐层推进
——谈《直线与圆的位置关系》一课变式教学的实践与反思

张胥奎
（江苏省苏州市沧浪中学校　215008）

[摘　要]数学问题解决的一条基本思路是“将未知问题化为已知问题，将复杂问题化为简单的问题”，在教学中，为了解决一个复杂问题，我们常常根据学生的实际水平，将这个复杂问题分解成一个个有序的子问题，通过子问题的解决逐步达成对复杂问题的解决，而其中变式教学就是常用的手段之一。变式教学重视知识的发生过程，把教学作为一个活动过程，教师改变问题情境，有层次地搭建“台阶”，引导学生体验、探索，使学生的原有认知结构不断整合、扩充，从而建构出新的认知结构，以达到化解难点，解决问题的目的。

[关键词]课本资源；直线与圆的位置关系；变式训练
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6261.2021.07.157

建构主义理论指出把学生现有的知识经验作为新知识的生长点，引导他们从原有的知识经验中“生长”出新的知识经验，因此变式教学符合建构主义理论。心理学家伍德曾用“脚手架”一词来描述小孩如何在成人指导下学习。布鲁纳则将此应用于教学中，即强调教师在教学活动中搭建适当的“脚手架”，以激发学生的最近发展区。著名教育家加涅的教学序列观点也强调教学设计上要求：第一，要确定各分任务。第二、保证各分任务的完成。第三，设计一个完成任务的顺序，以便产生理想的迁移。这些理论都为变式教学提供了坚实的理论依据，那么何为变式教学呢？

一、变式教学的涵义

变式教学是利用构造一系列变式的方法，来展示知识发生、发展过程，数学问题的结构和演变过程，解决问题的思维过程，以及创设暴露思维障碍情境，从而，形成一种思维训练的有效模式。 在数学变式中将不同的角度、不同的内容、不同的问题和条件设置实际的问题场景，通过实际现象暴露问题，体现各个问题之间存在的内在联系，使用新方法解决问题。

变式教学分概念性变式和过程性变式。概念性变式在教学中偏重于使学生获得对已成形概念的多角度理解。“过程性变式”于20世纪八十年代由顾泠沅教授提出，他将教学变式从概念教学推广到活动经验的教学。通过建立学习对象与学习者已有知识的内在合理联系，“在数学活动过程中，通过有层次的推进，使学生分步解决问题，积累多种活动经验。”

二、变式教学的一次教学实践

在平面几何对直线与圆之间的关系进行了定性的研究，即依照它们公共点的个数来判定它们的位置关系。但在实际问题中，我们会经常遇到直线与圆的位置关系的定量刻画问题，如当直线与圆有公共点时，其公共点的准确位置的确定问题，这是平面几何没有解决好的问题。学习了坐标法后，可以通过建立平面直角坐标系，使得直线与圆可以用方程表示，从而将直线与圆的位置关系的研究转化为直线的方程与圆的方程之间的数量关系的研究.当直线与圆有公共点时，公共点位置的确定就转化为求解直线的方程与圆的方程的公共解。依据圆心到直线的距离与半径长的关系判断直线与圆的位置关系，是运用点到直线的距离公式求出圆心到直线的距离，然后比较这个距离与圆的半径的大小，并作出位置关系的判断，仍然是用坐标法解决问题（几何意义相对直观些）。研究直线与圆的位置关系，一是从几何角度直观判断，二是通过直线与圆的方程从“数”的角度进行研究，这体现了数形结合的思想。

直线与圆问题是解析几何的基础，蕴含着解析几何的基本思想、基本方法，下面结合《直线与圆的位置关系》一课的教学实践谈变式教学在高三数学复习中的运用。

问题：（必修2　P113　例题改编）自点 $P(-2,3)$ 作圆 O：$x^2+y^2=4$ 的切线 l，求切线 l 的方程。

解法一：当直线 l 斜率不存在时，直线 $x=-2$，满足题意。

当直线 l 斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y-3=k(x+2)$，

因为直线 l 与圆 O 相切，所以圆心 O 到直线 l 的距离 d 等于半径 r，

所以 $\frac{|2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=r$，求得 $k=-\frac{5}{12}$，

因此切线 l 的方程为 $5x+12y-26=0$ 或 $x=-2$

方法二：点P在圆外，过P作圆的切线有两条。设切点分别为A，B。由图易得切线PA的方程为：$x=-2$，由 $\tan\angle APO=\frac{2}{3}$，所以 $\tan\angle APB=\frac{12}{5}$，因此切线PB的斜率为 $-\frac{5}{12}$，因此切线 l 的方程为：$5x+12y-26=0$ 或 $x=-2$

变式1：已知点 $P(\sqrt{2},\sqrt{2})$，过点 P 作圆 O：$x^2+y^2=4$ 的切线 l，求切线 l 的方程。

解析：点 P 由圆外变到了圆上，过 P 作圆 O 的切线只有一条，并且这条切线与过切点的半径垂直，因此切线 l 的方程为 $x+y-2\sqrt{2}=0$。

变式2：已知 x,y 满足条件 $x^2+y^2=4$，求代数式 $\frac{y}{x-3}$ 的取值范围。

解析：数形结合，将 $\frac{y}{x-3}$ 看作点（x，y）与（3，0）两点连线的斜率，将问题转化为圆上点与（3，0）连线的斜率的范围，易得 $\left[-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$。

在此基础上可进一步将点（3，0）改为（0，-3），让学生去体会斜率范围的变化，引导学生对倾斜角为 $90°$ 的直线给予重点的关注。

变式3：已知圆 O：$x^2+y^2=4$ 上有且仅有四个点到直线

$12x-5y+c=0$的距离为1，求实数c的取值范围。

解析：观察图形，抓住圆心到直线的距离这一关键量，将问题转化为圆心O到直线的距离$d<1$，由$\frac{|c|}{13}<1$，所以$-13<c<13$。

变式4：已知直线l：$kx-y-k+1=0$与圆O：$x^2+y^2=4$，判断直线l和圆O的位置关系。

解法一：利用圆心O到直线l的距离d与圆半径r比较。

由题意，$d=\frac{|-k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{\frac{(k-1)^2}{k^2+1}}\le\sqrt{\frac{2(k^2+1)}{k^2+1}}=\sqrt{2}<r$，所以直线$l$与圆相交。

解法二：利用直线和圆的方程联立，通过解的个数来判断。

直线l与圆O方程联立，消去y得：$(1+k^2)x^2+(2k-2k^2)x+k^2-2k-3=0$，因为$\Delta=12(k+\frac{1}{3})^2+\frac{32}{3}>0$，所以直线$l$与圆$O$相交。

解法三：动中有定，观察直线的方程，直线l虽然是一条动直线，但恒过定点M（1，1），因为点M在圆O内，所以直线l必与圆O相交。

变式5：已知直线l：$kx-y-k+1=0$与圆O：$x^2+y^2=4$，求直线l被圆O截得的最短弦长。

解析：直线与圆相交时，半径，弦心距和半弦长构成直角三角形，即$(\frac{l}{2})^2+d^2=r^2$。因为r^2为定值，所以l最小，即d最大，变式4中直线l恒过定点M（1，1），所以当直线l与OM垂直时，d最大，即l最小，此时$d=\sqrt{2}$，所以最短弦长$l=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2}$。

变式5：已知圆O：$x^2+y^2=4$，过圆内一点M（1，1），作两条互相垂直的弦EF、GH，求EF^2+GH^2的值。

解析：作$OD_1\perp EF$，$OD_2\perp GH$，设$OD_1=d_1$，$OD_2=d_2$

因为$EF=2\sqrt{r^2-d_1^2}$，$GH=2\sqrt{r^2-d_2^2}$，

所以$EF^2+GH^2=4(r^2-d_1^2)+4(r^2-d_2^2)=8r^2-4(d_1^2+d_2^2)$，因为$d_1^2+d_2^2=2$，所以$EF^2+GH^2=24$。

变式6：已知圆O：$x^2+y^2=4$，过圆内一点M（1，1），作两条互相垂直的弦EF、GH，求四边形$EGFH$面积的最大值。

解析：四边形$EGFH$面积$S=\frac{1}{2}EF\bullet GH$，由变式5 $EF^2+GH^2=24$，

所以$S\le\frac{1}{2}\times\frac{EF^2+GH^2}{2}=6$，当且仅当$EF=GH$时取最大值。

变式7：已知圆O：$x^2+y^2=4$，过圆内一点M（1，1），作两条互相垂直的弦EF、GH，求线段EG中点Q的轨迹方程。

解析：设点Q (x,y)，因为EG为圆O的一条弦，所以$OQ^2+(\frac{EG^2}{2})=r^2$，因为$\frac{EG}{2}=MQ$，所以$OQ^2+MQ^2=r^2$，所以$x^2+y^2+(x-1)^2+(y-1)^2=4$，化简得：$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2}$，是以OM中点为圆心，$\frac{\sqrt{6}}{2}$为半径的圆。

变式8：已知圆O：$x^2+y^2=4$，过圆内一点M（1，1），作两条互相垂直的弦EF、GH，若$\overline{MN}=\overline{ME}+\overline{MG}$，求$|\overline{MN}|$的最大值。

解法一：由$\overline{MN}=\overline{ME}+\overline{MG}$可知，变式7中的$Q$为MN的中点，因为$Q$的轨迹方程为$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2}$，由相关点法可求得$N$的轨迹方程为$x^2+y^2=6$，因为M在这个圆内，所以$|\overline{MN}|$的最大值为$\sqrt{6}+\sqrt{2}$。

解法二：由EF、GH互相垂直，$\overline{MN}=\overline{ME}+\overline{MG}$可知四边形$ENGM$为矩形，由图形可得$ON^2=(\frac{EF}{2})^2+(\frac{GH}{2})^2=6$，所以点$N$在以$O$为圆心，半径为$\sqrt{6}$的圆上，所以$|\overline{MN}|$的最大值为$\sqrt{6}+\sqrt{2}$。

对于变式7中EG中点Q的轨迹方程，可以取OM的中点D，连接DQ，则DQ为三角形OMN的中位线，所以$DQ=\frac{ON}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以点在以$D$为圆心，半径为$\frac{\sqrt{6}}{2}$的圆上。

变式9：已知圆O：$x^2+y^2=4$，过圆上一点R（$\sqrt{2},\sqrt{2}$）作两条相异直线分别与圆O相交于S，T，若直线RS和直线RT的倾斜角互补，试判断直线ST与OR是否平行？

解法一：由题意，知直线RS和直线RT的斜率存在，且互为相反数，故可设直线RS：$y-\sqrt{2}=k(x-\sqrt{2})$，直线RT：$y-\sqrt{2}=-k(x-\sqrt{2})$

由$\begin{cases}y-\sqrt{2}=k(x-\sqrt{2})\\x^2+y^2=4\end{cases}$得$(1+k^2)x^2+(2\sqrt{2}k-2\sqrt{2}k^2)x+2k^2-4k-2=0$

因为点R的横坐标$\sqrt{2}$一定是该方程的解，故可得$x_S=\frac{\sqrt{2}k^2-2\sqrt{2}k-\sqrt{2}}{1+k^2}$，将$k$替换为$-k$得$x_T=\frac{\sqrt{2}k^2+2\sqrt{2}k-\sqrt{2}}{1+k^2}$. 所以$k_{ST}=\frac{y_T-y_S}{x_T-x_S}=\frac{-k(x_T-\sqrt{2})-k(x_S-\sqrt{2})}{x_T-X_s}=\frac{2\sqrt{2}k-k(x_T+x_S)}{x_T-x_S}=1=k_{OR}$，所以直线ST与OR平行。

方法二：从图形看，取点R关于X轴的对称点Z，则$OR\perp OZ$，因为$\angle SRZ=\angle TRZ$，所以点Z为弧ST的中点，所以$OZ\perp ST$，所以直线ST与OP平行。

总之，变式教学的主要作用在于凝聚学生的注意力，培养学生在一定条件下迁移、发散知识的能力。做到知识结构清晰、层次分明，使优、中、差的学生各有所得，尝试到成功的乐趣，激发学生的学习热情，达到举一反三、触类旁通的效果。

参考文献

[1]张君尧，立足课本　应用变式——例谈试题源于课本，《中学数学》，1995（01）：12-17

作者简介：

张胥奎，苏州市沧浪中学校（立达中学校西校区）校区负责人，副校长，教育硕士、高级教师、苏州市数学学科带头人、苏州市优秀教育工作者、苏州市直属学校教坛新秀、苏州市模范执行“三项规定”优秀教师；曾获“一师一优课、一课一名师”赛课部优，苏州市教育教学成果二等奖，苏州市中学青年教师评优课比赛、把握学科能力竞赛市区一等奖；参与国家级课题一项，主持市级课题两项，多篇论文在国家、省级以上刊物发表或获奖。