

HPM视角下单位分数拆分课例教学及评价

马宝林 任荣欢

(河南科技学院 河南 新乡 453003)

[摘要]单位分数拆分是指将一个单位分数(或最简真分数)写成两个或两个以上的单位分数之和.笔者将从HPM的视角引入关于单位分数拆分问题的讲授并结合HPM的教学实践评价进行评析.

[关键词]HPM; 单位分数; 拆分; 课例教学及评析

[DOI] 10.12252/j.issn.2096-6261.2021.07.196

1. 引言

学生在六年级总复习或小升初中,习题中时常出现关于单位分数的计算,难度中等偏上.笔者从HPM的角度来设计教学,利用古埃及和斐波那契的历史故事来讲授单位分数的拆分问题,融入思政元素,让学生感受古人的解题思想,增加学习兴趣.通过小组合作探究,共同得出一个单位分数拆分成两个或者三个单位分数之和的通用公式,来增加学生对数学学习的动机和自信心,通过公式的讲解,让学生意识到不能只凭借经验直觉得出结果,应不但能知其然,也要知其所以然.

2. 历史材料搜集

单位分数一般指分数单位.特别地,把单位“1”平均分成若干份取其中的一份的数,叫做分数单位(或单位分

数),记为 $\frac{1}{n}$ ^[1].

单位分数还叫“埃及分数”.大约在公元前3000年,古埃及的《莱茵德纸草书》中提及了单分数与普通分数之间的转化,埃及人或许是因为社会和生活的实际需要,在均分面包和鱼等食物的情况下,引进了单位分数,例如有3片面包,要

分给8个人,按照现代的计算,每个人分 $\frac{3}{8}$ 片即可,但埃及人的做法是这样的:先将每片面包平均分成4份,每人得1份,

再将剩下 $\frac{1}{8}$ 的面包平均分成8份,每人再得1份,最终每人得

到 $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ 份面包.可以得到 $\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ 的一个分数的单位分数和.为了使这种分解过程做起来更为容易,纸草书中给出了一

张形如 $\frac{2}{k}$ (k从5到101的基数)的分数分解为单位分数之和的表^[2].

文艺复兴时期的意大利数学家斐波那契有一本著作《算盘全书》,书中分析了每个真分数都有单位分数和的埃及表示方法——“贪心算法”^[3].贪心算法是把真分数 $\frac{m}{n}$ 拆成几个不同的单位分数之和的办法.其方法是,取不大于 $\frac{m}{n}$ 的最大单位分数 $\frac{1}{k_1}$ 作为表达式的第一项;再用不大于 $\frac{m}{n} - \frac{1}{k_1}$ 的最大单位分数作为第二项;以此类推.例如,求 $\frac{7}{8}$ 的单分数分解.要把 $\frac{7}{8}$ 表示为几个单位分数的和,很明显,比 $\frac{7}{8}$ 小的最大单位

分数为 $\frac{1}{2}$,这是第一项; $\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$,比 $\frac{3}{8}$ 小的最大单位分数

是 $\frac{1}{3}$,这是第二项; $\frac{3}{8} - \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$, $\frac{1}{24}$ 恰好是个单分数,就成

为第三项.因此有: $\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$.

3. 教学设计实施

3.1 借鉴史料,引入新知

师:现在要到六一儿童节了,班里边要给表现优秀的8位学生发苹果,但是老师只有3个苹果,怎么分才公平呢?

生1:把每个苹果平均分成8份,每个人拿1份,三个苹果共拿3份,即每个人得 $\frac{3}{8}$ 份苹果.

师:是的,这是我们日常生活中的分法,现在我们来看看古埃及人遇到这种情况是怎么分的.(出示埃及人分面包引入单位分数的视频)我们现在用古人的方法可以把3个苹果公平地分给8个人吗?

师:把1个苹果平均分成4块,3个苹果共分成了12块,这8个同学各得1块,剩下的4块再平均分成8块,每个人再得1块,这种分法中,每个学生得到了多少苹果呢?

生2:第一次学生得到了一个苹果的 $\frac{1}{4}$ 块苹果,剩下的4块苹果又平均分成8块,每个学生得到了 $\frac{1}{8}$ 块苹果,加起来总

共是 $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

师:我们现在的分法和埃及人的相比,最终的结果相等吗?

生2: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$,他们的结果是相等的.

师:现在老师有7个苹果,分给8位学生,又该怎么分呢?我们再来看看著名的意大利数学家斐波那契关于分数的单位拆分是怎么做的吧.(出示关于斐波那契“贪心算法”的

故事,对 $\frac{7}{8}$ 进行拆分)

师:重新回到将3个苹果分给表现优秀的8位同学这个问题上,同学们可以利用贪心算法来计算么?

生3:比 $\frac{3}{8}$ 小的最大单位分数为 $\frac{1}{3}$,这是第一项;

$\frac{3}{8} - \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$, $\frac{1}{24}$ 恰好是个单分数,就成为第二项.因此有:

$\frac{3}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$.

师：很好！你已经掌握了斐波那契贪心算法的精髓啦。如果现在老师只有一个苹果，按照古埃及和斐波那契的做法，将单位分数进行单位拆分，又该怎么分呢？我们来学习一个特殊的巧法公式。（板书课题）

3.2 合作交流，探究公式

师：我们来探讨分数拆分的一种特殊情况：将一个单位分数写成两个或三个单位分数之和的巧妙解法，这个问题也是我们在习题中经常遇到的。例如：

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)}; \quad \frac{1}{7} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)}$$

括号里边应该写哪些数字呢？

生4：利用贪心算法，比 $\frac{1}{7}$ 小的最大单位分数为 $\frac{1}{8}$ ，

这是第一项： $\frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$ ，

$\frac{1}{56}$ 恰好是个单分数，就成为第二项。因此有： $\frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{56}$ 。

师：不错，学以致用的能力很强，那 $\frac{1}{7} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)}$ 该怎么填呢？（学生沉默）

师：我们来学习一个关于这种问题的通用方法。先来看

$\frac{1}{7} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)}$ ，现在有一个式子是 $\frac{1}{M} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B}$ ，我们之前遇到

过 $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, $\frac{2}{3 \times 5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ ，大家还记得他们的

规律吗？

生3： $\frac{B-A}{A \times B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{B}$ ($B > A$)。 (经过计算可以验证该式子是成立的)

师：不错，我们来看 A, B 相差1时，可以得到

$\frac{1}{A \times (A+1)} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A+1}$ 是成立的，即 $\frac{1}{A} = \frac{1}{A+1} + \frac{1}{A \times (A+1)}$ (为

了简便记为公式 $\frac{1}{M} = \frac{1}{M+1} + \frac{1}{M(M+1)}$) 也是成立的。(板书

公式) 你们现在会写出来 $\frac{1}{7} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)}$ 中括号里边的数吗？

生4： $\frac{1}{7} = \frac{1}{7+1} + \frac{1}{7 \times (7+1)} = \frac{1}{8} + \frac{1}{56}$ 。

师：你们会试着求出 $\frac{1}{7} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)}$ 吗？

生4 (学生合作探究)：先将 $\frac{1}{7}$ 写成两个单位分数相加的形式，然后再把其中的一个单位分数，再写成两个单位分数相加，这样就可以将 $\frac{1}{7}$ 写成三个单位分数相加了。

师：脑筋转得非常快，知道和刚才讲的知识联系起来。你能说出具体的答案么？

生4： $\frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{56} = \frac{1}{8+1} + \frac{1}{8 \times (8+1)} + \frac{1}{56} = \frac{1}{9} + \frac{1}{72} + \frac{1}{56}$ ，将 $\frac{1}{8}$ 写成两个单位分数相加。

师：不错，有的同学说将 $\frac{1}{56}$ 写成两个单位分数之和，这个也可以，但是我们数学以简便优先，56更大，计算会稍微麻烦点，因此先拆分 $\frac{1}{8}$ 。

师：其实我们可以得到一个将单位分数写成三个单分数

和的通用公式。即 $\frac{1}{M} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$ (M, A, B, C 为正整数)，知

道 $\frac{1}{M} = \frac{1}{M+1} + \frac{1}{M(M+1)}$ ，我们将 $\frac{1}{M+1}$ 继续以同样的方式拆分，得到什么结果呢？

生6：根据 $\frac{1}{M+1} = \frac{1}{M+2} + \frac{1}{(M+1)(M+2)}$ ，可以得到

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M+2} + \frac{1}{(M+1)(M+2)} + \frac{1}{M(M+1)}$$

师：利用公式是否也可以求

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)} \text{ 呢？}$$

生6：根据公式，得

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{7+2} + \frac{1}{(7+1)(7+2)} + \frac{1}{7(7+1)} = \frac{1}{9} + \frac{1}{72} + \frac{1}{56}$$
。(师生从右向左验证得到该公式正确)

师：通过以上的讨论，那我们是不是可以将一个单分数拆分成4个或5个甚至更多个几分之一相加的形式呢？

生7：可以，可以多次利用公式 $\frac{1}{M} = \frac{1}{M+1} + \frac{1}{M(M+1)}$ 对单位分数进行拆分。

师：不错，经过对此公式的学习，我们发现此公式和斐波那契的贪心算法有一定的相似之处呢！不过利用公式比贪心算法求解会更加简便，节省时间。

3.3 课堂练习，应用公式

$$(1) \frac{1}{10} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)}, \frac{1}{10} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)}$$

师：出示练习题 (2) $1 = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)}, 1 = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)}$

生8： $\frac{1}{10} = \frac{1}{M+1} + \frac{1}{M \times (M+1)} = \frac{1}{11} + \frac{1}{110}$

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{M+2} + \frac{1}{(M+1) \times (M+2)} + \frac{1}{M \times (M+1)} = \frac{1}{12} + \frac{1}{132} + \frac{1}{110}$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

生9： $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

在计算的过程中把1写成两个单位分数相加时，并不能用公式来计算。(学生产生疑惑)

师：是的，通过计算发现1并不能通过公式来被拆分成两个单分数之和，对于此公式M应该从等于2时，是成立的。那在

这里 $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ ，我们把等号两边同时乘上 $\frac{1}{M}$ (M 是正整数)，可以得到什么呢？ (下转第452页)

究[D].保定:河北大学,2014.

[5]曲伟新.对外汉语听力教学模式新探——从“汉语桥”在华留学生汉语大赛的比赛环节引出的思考[J].长春教育学院学报,2012,(03):109-110.

[6]刘纪新,赵文玲.论“汉语桥”在华留学生汉语比赛的文化内涵——以央视总决赛为例[J].湖南城市学院学报,2012,(05):47-49.

[7]周育萍.对外汉语教学中的文化渗透——“汉语桥”在华留学生大赛文化试题引发的思考[J].兰州教育学院学报,2013,(04):83-85.

[8]彭贇.第六届“汉语桥”在华留学生中文比赛赛题分析及思考[C].北京大学对外汉语教育学院,2014.

[9]彭贇,田艳.“汉语桥”在华留学生中文比赛的分析与思考——基于第六届“汉语桥”比赛试题[J].汉语国际传播研究,2015,(01):168-175+199-200.

[10]李鑫.论对外汉语教学中的文化素养教学——以历届“汉语桥”在华留学生汉语大赛试题为例[J].亚太教育,

2016,(16):79-80.

[11]侯一凡.素人真人秀同样可以出彩——以2015“汉语桥”我与中国第一次亲密接触为例[J].戏剧之家,2015,(19):255+265.

[12]“汉语桥”世界中学生中文比赛如火如荼[J].天津中学生,2015,(06):12.

[13]陆俭明.建设友谊之桥——汉语桥,为建设和谐国际社会贡献力量[J].云南师范大学学报(对外汉语教学与研究版),2007,(05):2+10.

[14]周媛媛.这股热潮叫“汉语”——汉语国际教育搭建的那座“汉语桥”[J].高校招生,2013,(06):32-33.

[15]隗鹏,李思颀.“汉语桥”——连接世界青年与中国文化之桥[J].山东教育,2008,(26):1+65.

[16]王卫敏.论对外汉语教学中的文化因素教学——以第五届“汉语桥”在华留学生汉语大赛为例[J].安阳师范学院学报,2014,(06):112-115.

(上接第384页)

生8: $\frac{1}{M} = \frac{1}{2M} + \frac{1}{3M} + \frac{1}{6M}$

师: 可以作为求 $\frac{1}{M} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)}$ 的一个简单方法么?

生8: 可以,例如之前的 $\frac{1}{7}$ 就可以, $\frac{1}{7} = \frac{1}{14} + \frac{1}{21} + \frac{1}{42}$, 通

过验证, $\frac{1}{14} + \frac{1}{21} + \frac{1}{42} = \frac{1}{7}$, 所以 $\frac{1}{M} = \frac{1}{2M} + \frac{1}{3M} + \frac{1}{6M}$ 是成立的.

师: 我们又得到了一个解决 $\frac{1}{M} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)}$ 的方法.(板书公式)

4. 教学反思与总结

通过本节课的设计,本人认为要高质量地将数学史融入一节数学课堂,需要考虑以下因素.首先,要恰当地选用数学史资料.例如,虽然单位分数在古埃及最早使用,但是和斐波那契的“贪心算法”相比,贪心算法的历史更贴合本节课知识的讲授,因此采用附加式着重描述斐波那契算法的历史可以增加课堂人文色彩,用重构式将数学史与课堂的每一个环节融为一体.其次,要自然而然地将数学史融入课堂中.不能为了在课堂上加数学史而加数学史料,而应该考虑所讲授知

识是否适合加入数学史.最后,应该充分显示数学史对学生的教育价值.例如,通过出示古埃及与斐波那契的历史故事,增长学生的数学史知识,古今对比,拓宽学生思维,创造学生的学习动机.但是在讲解拆分单位分数的通用公式时,老师基本上全程讲解,没有体现数学史促进学生探究的强烈欲望.

参考文献

[1]曹才翰.中国中学教学百科全书:数学卷[M].沈阳:沈阳出版社

[2]栗小妮,贾彬.运用数学史玩转单位分数[J].中小学课堂研究,2020(12)7-12

[3]汪晓勤,邹佳晨.基于数学史的数学学科德育内涵课例分析[J].数学通报,2020(3)7-12

[4]义务教育教科书,数学,六年级上册[M].人民教育出版社,2012.12

[5]沈中宇,李霞,汪晓勤.HPM课例评价框架的建构——以“三角形中位线定理”为例[J].中学数学教育,2017(1)35-41

基金项目:河南省2021年度教师教育课程改革研究项目(2021-JSJJYB-075);河南省大学生创新创业训练计划项目(S202110467012)。

作者简介:马宝林(1978.02-),男,甘肃张家川人,副教授,硕士生导师,研究方向:数学教育、数学文化。