妙用“变式探究”突出模型构建 实现深度学习

张义群

（河南省方城县基础教育教学研究室）

[摘　要]在初中数学教学中，正方形是一个重要的知识内容，以正方形为背景，考查数学的知识点，是数学教学的重要方法。“赵爽弦图”是正方形的图形背景，本文以构建“赵爽弦图”数学模型为重点，采用“特殊化和类比”的解题思路，破解正方形的各种变式问题，实现深度的数学教学与研究。

[关键词]初中数学；正方型；赵爽弦图；变式探究；模型构建

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6261.2021.08.262

正方形，因其为最特殊的四边形，具有平行四边形的一般性质，又具有矩形与菱形的独特性质，因此称它为最完美的四边形.也正是因为这些性质，几何中的很多问题，以正方形为背景，考查数学中方方面面的知识点。其中，“赵爽弦图”就是以正方形为图形背景，其中蕴含着丰富的数学知识与思想方法。很多学生看到以“赵爽弦图”为知识背景的几何问题时，由于对“赵爽弦图”的内涵本质认识不足，因而感觉无从下手。这类问题要求学生会用“类比”思想，进行巧妙的变式，构建出“赵爽弦图”这一数学模型，问题便能迎刃而解。美国数学家、数学教育家乔治●波利亚认为：“一般化、特殊化和类比是获得发现的伟大源泉”。在初中数学教学中，“特殊化和类比”能够帮助学生打开解决问题的思路，进而发现问题的本质。

1 基本模型—赵爽弦图

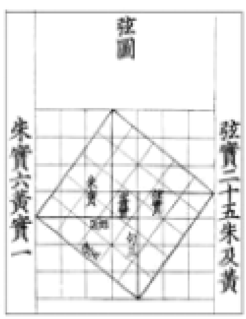

图1

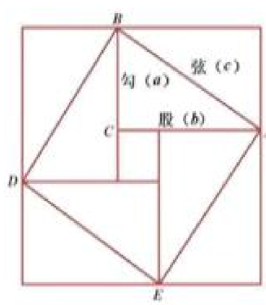

图2

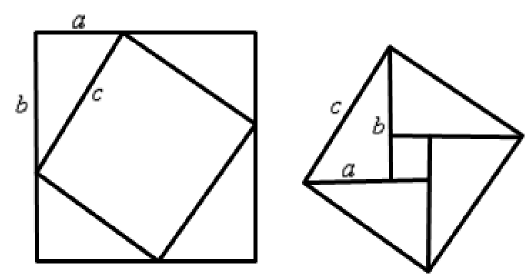

图3

图1就是1700多年前中国古代数学家赵爽用来证明勾股定理的弦图.该图案简洁优美、远看像旋转的纸风车，曾作为2002年在北京召开的国际数学家大会的会标，从中可以体会到我国古代人民的智慧，以及古代数学家对数学的研究。图2是由图1抽象简化而来的图形，从图2中我们可以进一步提取得到赵爽弦图的两种基本图形，如图3.这两个基本图形都是由四个全等的直角三角形拼成的正方形，虽然所拼的方法不同，但是都可以借助于面积之间的关系，说明勾股定理的合理性。图3所示的两个图形，是“一线三垂直”证明全等的两种特例，能够给很多这样问题的解决以启示。下面我从几道数学变式问题入手，体会“类比、变式”对分析问题、解决问题的帮助，感受数学建模思想的魅力。

2 问题呈现

变式问题1.如图4，正方形ABCD的边长为5，AG=CH=4，BG=DH=3，连接GH，则线段GH的长为__________.

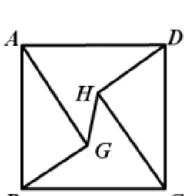

图4

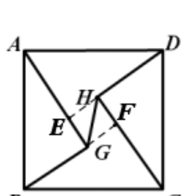

图5

2.1 问题的分析与解决

该题正是以正方形为问题背景，通过正方形的性质、全等三角形、勾股定理的逆定理以及勾股定理知识的运用，考查学生类比，及模型构建能力。是一个较为常见的求线段长度的题目。问题中蕴含着“赵爽弦图”的基本数学模型。只需延长线段BG、DH分别与AG、CH相交，即可得到如图5所示的“赵爽弦图”基本图形，所求的线段GH的长即为小正方形EGFH的对角线的长，而小正方形的边长为AG与BG之差，因此GH的长为$\sqrt{2}$。此题通过添加适当的辅助线，转化为基本图形，考查了学生构建基本图形，运用基础知识与基本技能解决问题的能力。

2.2 问题的分析与解决

问题1中，求线段的长，通过延长线段即可构建“赵爽弦图”这一基本图形，所求问题随着辅助线的添加，综合勾股定理、勾股定理的逆定理、全等三角形、正方形的性质，变得简单明了。而对于问题2，涉及了等腰三角形、正方形、面积最大值、全等、相似等核心知识的运用，此题虽然是一道填空题，但是题目将几何图形与动点、最值问题相结合，考查学生的探究能力、推理论证能力，以及基本活动经验的积累。在问题解决中需要“化动为静”，类比转化，其中蕴含了“数学建模”“数形结合”“函数”等数学思想方法。

结合图形，欲求△BDE面积的最大值，我们首先会思考△BDE面积该如何表示，因此，不妨以BD为底，过点E作EG⊥BD于点G，如图7，则$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}BD\bullet EG$，此处，D为边AB上一动点（B点除外），所以BD的长随点D的运动而发生变化，而△BDE面积也随之变化，因此“求△BDE面积的最大值”会自然的联想建立△BDE面积关于某条线段长的函数关系式，然后利用函数的增减性，从而实现问题的解决。因此设BD的长为x，然后用含x的代数式表示线段EG即可。

如图8，分别过点A、C作AM⊥BC于点M，CH⊥BA交BA的延长线于点H，此时，图形中出现了“赵爽弦图”的部分特征，即分别以DE、CD为斜边的两个直角三角形Rt△EAG和Rt△DCH，由“赵爽弦图”的特殊性，可知Rt△EAG≌Rt△DCH，所以，EG=DH，因为AB=AC，联想等腰三角形的“三线合一”，可知AM垂直且平分BC，于是构造了“A”型相似基本图形，基本图形的出现使问题变得简单。

由△BAM∽△BCH，可得$\frac{BA}{BC}=\frac{BM}{BH}$，即$\frac{5}{4\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{BH}$，所以BH=8，进而知道DH=8－$x$，EG=DH=8－$x$，所以$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}BD\bullet EG=\frac{1}{2}\bullet x\bullet(8-x)$$=-\frac{1}{2}x^2+4x=-\frac{1}{2}(x-4)^2+8$，由二次函数的性质可知，当$x$=4，即BD=4时，△BDE面积有最大值，最大值为8。

反思该问题的解决过程，通过对所求面积最值的初步分析，用相关线段表示面积，从而把求面积的问题又转化为了与线段相关的问题，寻找表示相关线段时，涉及了正方形，通过添加适当的辅助线，使“赵爽弦图”的基本模型得以呈现，从中可以看到，添加辅助线进行转化，是解题的关键所在。同时，出现等腰三角形，往往联想等腰三角形的一般性质，进而作出底边上的高，构造相似，运用了数学中的核心知识，求出易求的相关量，更容易使问题得以解决。此题的解决也提示我们，要善于根据题干信息，联想相关图形的性质和特征，要有意识的与常见的数学基本模型相联系，从而发现问题的本质所在。其实，从问题1到问题2的解决，都能从中感受到这两个问题均是“赵爽弦图”的变式呈现。但是，千变百变，万变不离其宗，当题目的信息指向这些基本图形时，我们就要有意识的进行转化和类比，弄清这些变式问题中的不变特征，从而使问题得以解决。

2.3 问题的分析与解决

该问题的本质特征，仍然是“赵爽弦图”的基本模型变式，也即出现了“一线三直角”的基本全等模型，从变式1的求线段长问题，到变式2的求面积问题，以及该问题的求周长问题，我们可以类比作如下分析：

由$C_{\triangle BCG}=BC+BG+CG=3+BG+CG$.易知：只需求得BG+CG即可，怎么求？

由题目所提供的信息，进行合理的联想，

①$\because\frac{S_{阴影}}{S_{正方形ABCD}}=\frac{2}{3}$ 即$\frac{S_{阴影}}{9}=\frac{2}{3},\therefore S_{阴影}=6$

②∵CE=DF，易证：△BCE≌△CDF，∴易得BE⊥CF，$S_{\triangle BCG}=S_{四边形EDFG}=\frac{9-6}{2}=\frac{3}{2}$ 又$\because S_{\triangle BCG}=\frac{1}{2}BG\bullet CG=\frac{3}{2}\ \therefore BG\bullet CG=3$ 在Rt△BCG中，

③联立：$\begin{cases}BG\bullet CG=3\\BG^2+CG^2=9\end{cases}$ 易得$(BG+CG)^2=9+2BG\bullet CG=15$

$\therefore BG+CG=\sqrt{15}$

$\therefore C_{\triangle BCG}=\sqrt{15}+3$

这里，利用了正方形的特性：“四条边相等，四个角都是直角”，从而易得三角形全等，再加之，完全平方公式配方法的运用，问题便可得以解决.

反思问题1和问题2的解决过程，对于图形的面积及周长问题，往往都可以通过转化，转化为与线段相关的问题去解决。其中联想基本图形及基本图形的性质，通常可以迅速的打开问题解决的思路，其中涉及正方形问题时，联想“赵爽弦图”的特性，构造赵爽弦图也是使问题得以快速解决有效策略。

3 教学反思：多做变式，提炼方法

《义务教育数学课程标准（2011版）》要求，学生不仅要理解和掌握基本的数学知识与技能，更要体会和运用数学思想与方法，获得基本的数学经验。在数学教学中，特别是进行专题复习时，要寻找不同题目间的共性特征，通过一类问题的变式呈现，帮助学生建构良好的认知结构，并逐步内化为自我解决问题的能力。通过讨论和辨析，体会和运用数学思想与方法，获得基本的数学经验，实现真正意义上的深度学习。例如问题1，初看该问题，会感觉无从下手，当添加辅助线进行转化后，就是赵爽弦图的直接呈现。问题2通过转化，虽然只是赵爽弦图的部分特征，通过全等及相似的知识，由动点联想到“函数”的性质，可以顺利解决。问题2和3虽然是求面积和周长的问题，我们仍要从线段入手去解决。通过相类似问题的一些变式呈现，使学生学会问题的分析与知识的综合运用，从而不至于遇到一个新问题时，就慌了手脚。特别是在解题教学中，要引导学生充分展开探究活动，反思思维过程，形成思维策略，提炼出一类问题的解决方法，实现真正意义上的深度学习。

参考文献

[1]义务教育《数学课程标准（2011版）》[M].北京师范大学出版社，2019.132.

[2]刘月霞　张国华《深度学习：走向核心素养》[M].教育科学出版社，2018.166.

[3]谢宏纪　《初中数学复习方法与策略》[M].华东师范大学出版社，2021.220.

[4]鲍聪晓　《巧用“特殊与一般”引领思维突破》[J].中学数学教学参考，2018（9）：21-23.

基金项目：课题项目：本文系2021年度河南省基础教育教学研究项目《初中数学“变式探究促深度学习”研究》（课题编号：JCJYC210313037）研究成果。