考研数学中一种高频题型——高阶导数的解析

吴爱娟
北京工商大学嘉华学院

[摘　要]越来越多的本科毕业生选择考取国内研究生，但是考研数学对于很多学生来说是有困难的，特别是对于理工专业的学生要考难度系数大一点的数学一、二，有很多难点比如中值定理的应用、函数的泰勒展开式及其应用、导数概念的理解及高阶导数的求法等，本文主要讨论其中的一个高频题型——高阶导数的求法，希望对考研的学生们有所帮助。

[关键词]考研数学 n阶导数 递推关系式 泰勒展开式 莱布尼兹公式
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6261.2021.08.740

随着我国经济的发展和就业难的趋势，考取国内研究生是很多本科大学生选择，但是在这一选择上一大拦路虎就是考研数学，特别是对于难度系数大一点的数学一、二，为了帮助到这部分学生，笔者研究了多年来考研真题，总结归纳出很多难点、高频点的做题经验方法，本文主要讨论其中的一个高频题型------高阶导数的求法，希望对考研的学生们有所帮助。

做这类题目之前，学生们要具备扎实的基础知识，比如函数在一点处导数的定义、求导公式和求导法则、高阶导数的定义等。下面主要介绍高阶导数的四种求法及其他们各自的适用背景。

一、递推关系式法

适用背景：目标函数较容易求出逐阶导数且易总结归纳出n阶导数形式。

方法：逐阶求导，直到总结归纳出一般求导公式。

例1（1990年考研题）已知函数$f(x)$具有任意阶导数，且$f'(x)=[f(x)]^2$，则当n为大于2的正整数时，$f(x)$的n阶导数$f^{(n)}(x)$是（　）

解：因为$f'(x)=[f(x)]^2$，所以

$$f''(x)=2[f(x)]f'(x)=2[f(x)]^3$$

$$f'''(x)=2\cdot3[f(x)]^2f'(x)=2\cdot3[f(x)]^4$$

$$\cdots f^{(n)}(x)=2\cdot3[f(x)]^2f'(x)=n![f(x)]^{n+1}$$

，选（A）.

例2（1991年考研题）设$f(x)=xe^x$，则$f^{(n)}(x)$在点x=_____处取极小值________.

解：由$f(x)=xe^x$，得$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$，

$$f''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x,\quad f'''(x)=e^x+(x+2)e^x=(x+3)e^x\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=(x+n)e^x,f^{(n+1)}(x)=(x+n+1)e^x,f^{(n+2)}(x)=(x+n+2)e^x$$

因为$f^{(n+1)}(-(n+1))=0,f^{(n+2)}(-(n+1))=e^{-(n+1)}>0$

所以$f^{(n)}(x)$在点$x=-(n+1)$处取极小值$-e^{-(n+1)}$.

类似的题目也出现在1995年、2016年考研题目中。

二、定义法

适用背景：研究目标函数在一点处的较低阶（比如2、3阶等）的高阶导数或者分段函数在分界点处的可导性。

方法：利用一点处（高阶）导数定义-----$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$或者

$$f'(x_0)\text{存在}\Leftrightarrow\lim_{h\to0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}。$$

例3（1992年考研题）设$f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使$f^{(n)}(0)$存在的最高阶数n为（　）

$(A)0\quad(B)1\quad(C)2\quad(D)3$

解：因为$f(x)=\begin{cases}4x^3, & x\ge0\\2x^3, & x<0\end{cases}$，所以

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{4h^3}{h}=0$$

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{2h^3}{h}=0，故$$

故 $f'(x)=\begin{cases}12x^2, x\geq 0\\ 6x^2, x<0\end{cases}$，所以 $\begin{matrix}\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{12h^2}{h}=0\\ \lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{6h^2}{h}=0\end{matrix}$，

$f''(x)=\begin{cases}24x, x\geq 0\\ 12x, x<0\end{cases}$ 所以 $\begin{matrix}\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f''(h)-f''(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{24h}{h}=24\\ \lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{f''(h)-f''(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{12h}{h}=12\end{matrix}$，故

$f'''(0)$**不存在.**

三、泰勒展开式法

适用背景：研究的目标函数的泰勒展开式较容易，且求的是它在 $x=0$ 处的n阶导数 $f^{(n)}(0)$。

方法：对目标函数进行泰勒展开，然后逐阶求导。利用的技巧是幂函数求一次导降一次幂及幂大于等于1的幂函数在 $x=0$ 处的值为0.

例4（2000年考研题）求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的n阶导数

$f^{(n)}(0)(n\geq3)$.

解：因为 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$，所以，

$$f(x)=x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-3}+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n-2}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n-1}+\cdots$$

所以，$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\dfrac{n!}{n-2},n=3,4,L$.

像前述的例2，尽管函数 e^x 的泰勒展开较容易，但它不是求 $x=0$ 处的n阶导数 $f^{(n)}(0)$，因此泰勒展开式法不适合例2.

类似的题目也出现在2007年、2010年、2016年、2017年、2020年的考研题中。

四、莱布尼兹公式法

适用背景：两个函数乘积的高阶导，通常一个函数是幂函数，另一个函数的高阶导由递推法较易总结出规律。

方法：$u(x)$、$v(x)$ 都具有n阶导数，则

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+\cdots+C_n^iu^{(n-i)}v^{(i)}+\cdots+C_n^n u\ v^{(n)}$$

通常 $v(x)$ 取为幂函数，这是因为幂函数求一次导降一次幂，进而简化运算。

例5（2015年考研题）函数 $f(x)=x^2\cdot2^x$ 在 $x=0$ 处的n阶导数 $f^{(n)}(0)=$__.

解：因为 $(x^2)'=2x,(x^2)''=2,(x^2)^{(k)}=0,k\geq3$，

$(2^x)'=2^x\ln2,(2^x)''=2^x(\ln2)^2,\cdots,(2^x)^{(n)}=2^x(\ln2)^n$

所以 $f^{(n)}(x)=(2^x)^{(n)}\cdot x^2+C_n^1(2^x)^{(n-1)}\cdot2x+C_n^2(2^x)^{(n-2)}\cdot2$

$=2^x(\ln2)^n\cdot x^2+n2^x(\ln2)^{n-1}\cdot2x+n(n-1)2^x(\ln2)^{n-2}$，故

$f^{(n)}(0)=n(n-1)(\ln2)^{n-2}$.

本题尽管求的是 $x=0$ 处的n阶导数 $f^{(n)}(0)$，但是函数 2^x 的泰勒展开式不在常记的公

式中，但是其高阶导数由递推法较易总结出规律来，故选择莱布尼兹公式。

对于每一种求高阶导的方法，都总结出适用背景和解题方法并进行具体举例示范。本文目的不仅仅是训练学生们会做这部分题，更重要的是训练学生们的逻辑思维能力，分析解决问题能力-----心中记住问题是什么、解析已知条件信息、已知信息与问题相结合、最终解决问题，让学生们意识到万变不离其中的道理，体会到基本概念、基本定理、基本运算的重要性、达到厚积薄发。

参考文献

[1]宋国华 王晓静 牟唯嫣等编，高等数学[M]（第四版.上册）北京 石油工业出版社2021年6月.99页-103页，150页-153页.

[2]Dale Varberg，Edwin J.Purcell，Steven E.Rigdon著，微积分[M]（英文版.原书第9版）北京 机械工业出版社2012年10月.125页-129页.