

初高中数学衔接之二次函数极值存在的判别方法

钟佳丽

(河北联邦国际学校)

[摘要]数学有着十分重要的基础作用,二次函数的极值问题是这门学科里面非常重要的部分,同时也是初高中衔接中的重要内容,在实践中应用非常广泛,因此对它的研究就显得十分必要.本文首先介绍函数极值的定义及存在意义,然后分类讨论一元二次函数极值情况,并总结了极值的判断方法及典型例题,同时针对函数最值问题,列举了重要的解题方法.

[关键词]数学;极值;二次函数;初高中衔接;判别方法

[DOI] 10.12252/j.issn.2096-6261.2021.08.189

二次函数极值存在的判断是一个非常困难的问题,许多学者对此做了很多工作,我们在前人成果的基础上对函数极值的方法进行总结,我们要不断的进步与发展.让数学学起来更容易也更具美感.

1 概述

1.1 知识储备

极值来自数学应用中的最值问题.定义在一个有界闭区域上的每一个连续函数都必定达到它的最大值和最小值,问题在于要确定它在哪些点处达到最大值或最小值;如果不是边界点就一定不是内点,因而是极值点.

1.2 极值定义

定义1.1

假设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域有意义,如果对 x_0 该邻域全部点,有 $f(x) < f(x_0)$,即 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 极大值.如果该邻域全部点,均有 $f(x) > f(x_0)$,故 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 极小值.极大值和极小值统称为极值.

定义1.2

设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 某个邻域内有定义,对于该邻域内任一异于 (x_0, y_0) 点 (x, y) ,

(1) 如果 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$,则称函数在点 (x_0, y_0) 处有极大值 $f(x_0, y_0)$.

(2) 如果 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$,则称函数在点 (x_0, y_0) 处有极小值 $f(x_0, y_0)$.

定义1.3

设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 某个邻域内有定义,对于该点邻域内任一异于 (x_0, y_0) 点 (x, y)

(1) 如果 $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$,则称 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有极大值 $f(x_0, y_0)$

(2) 如果 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$,则称 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有极小值 $f(x_0, y_0)$

定义1.4

若多元 $u=f(p)=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 于点 P_0 邻域内有定义,并且当 $0 < |P_0 - P| < \delta$ 时, $f(P_0) \geq f(P)$ (或 $f(P_0) \leq f(P)$),则说函数 $f(P)$ 在 P_0 处取极大值(或极小值),点 P_0 称为函数 $u=f(P)$ 的极值点.

1.3 研究二次函数极值的意义

函数的极值不仅在实际问题中占有重要的地位,而且也是函数性态的一个重要特征.函数极值是数学研究的重要内容,由于其应用的广泛和变化纷繁,因此研究方法较多,例如不等式法,导数法,从矩阵的角度解决函数极值,利用Hesse矩阵判断二次函数的极值等等.这些理论的提出并得到应用,与诸多数学家在这方面的努力是分不开的,他们给出了许多好的解决函数极值的方法,且将诸理论与实际有机的结合起来,这不仅为科研打下了良好的基础,也为诸多领域的实际工作提供了便捷,如在经济,管理,金融,科研等方面提供了便捷的方法,使得许多问题很便利的得以解决.

综上,我们对二元函数极值的判断方法做一个比较全面的了解是相当重要的.

2 一元二次函数极值判别方法

一元二次函数,即只有一个未知数且未知数的次数是2的函数.

求一元二次函数的极值是中考热点,往往出现在压轴题中,多与面积、利润、成本等相结合.

2.1 判别方法

二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$

1. 若 $a > 0$ 时, $f(x)$ 有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$

2. 若 $a < 0$ 时, $f(x)$ 有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$

2.2 典型例题

已知一宾馆有50个房间可住宿,若房价为每天180元,房间全部住满.若每个房间每天房价每增加10元,有一个房间空闲.另外宾馆需对每个房间每天支出20元各种其他费用.因此,每个房间每天的房价不得超过340元.设每个房间房价每天增加 x 元(x 为10的正整数倍).

(1) 设一天订住房间数为 y ,直接写出 y 与 x 函数关系及自变量 x 取值;

(2) 设宾馆一天利润是 w 元,求 w 与 x 函数关系式;

(3) 一天订住多少个房间时,宾馆利润最大?最大利润是多少?

解:

(1) $y=50-\frac{1}{10}x$ ($0 \leq x \leq 160$,且 x 是10的整数倍),

$$(2) W = (50 - \frac{1}{10}x)(180 + x - 20) = -\frac{1}{10}x^2 + 34x + 8000,$$

$$(3) W = -\frac{1}{10}x^2 + 34x + 8000 = -\frac{1}{10}(x-170)^2 + 10890,$$

$x=170$ 不在其范围内, $a = -\frac{1}{10}$, 开口向下, 在对称轴的左边 W 随 x 增大而增大, 但 $0 \leq x \leq 160$,

∴当 $x=160$ 时, $W_{\text{最大}}=10880$, 当 $x=160$ 时, $y=50-\frac{1}{10}x=34$.

答: 当一天订34房间时, 每天利润最大, 最大利润为10880元.

3 二元二次函数极值的判别方法

二次函数的极值问题是初、高中教材的一个衔接点, 也是高一学生的难点, 特别是对称轴和区间同时是变量时, 对普高的学生来讲是一个不可跨越的知识难点. 对二元函数极值的判定, 不仅可以借助于二阶导数进行判定, 还可以借助于使用范围更广泛的一阶导数进行判定.

3.1 取得极值的条件

一般地, 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义, 如果对 x_0 附近所有点, 有 $f(x) < f(x_0)$, 即 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 极大值, 记作 $y_{\text{极大值}}=f(x_0)$, x_0 是极大值点. 如果对 x_0 附近所有点, 有 $f(x) > f(x_0)$, 即 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 极小值, 记作 $y_{\text{极小值}}=f(x_0)$, x_0 是极小值点.

极大值与极小值统称为极值.

3.2 结论证明及例题

求 $f(x) = (2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值点与极值.

解: $f(x) = (2x-5)\sqrt[3]{x^2} = 2x^{5/3} - 5x^{2/3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \frac{10}{3}x^{2/3} - \frac{10}{3}x^{-1/3} = \frac{10}{3}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$ 得

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
x'	+	不存在	-	0	+
y	↗	0	↘	-3	↗

有表可知, 点 $x=0$ 为极大值点, 极大值为 $f(x_0)=0$; $x=1$ 为极小值点, 极小值为 $f(1)=-3$.

3.3 判别方法

例: 求函数 $f(x, y) = x^2 + 5y^2 - 6x + 10y + 6$ 的极值.

解: 容易知道 $f(x, y)$ 的稳定点为 $P_0(3, -1)$, $\forall(x, y) \neq (3, -1)$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \bullet (x-3, y+1) = (2x-6, 10y+10) \bullet (x-3, y+1) = 2(x-3)^2 + 10(y+1)^2 > 0$$

因此 f 在点 $P_0(3, -1)$ 处取极小值, 又因为 f 处处存在偏导数, 故 $(3, -1)$ 是 f 的唯一极值点.

4 极值问题的应用

在数学实践中, 函数的极值问题占有非常重要的地位, 而且在实践中应用非常广泛, 对它的研究就显得十分必要. 比

如, 在消费者需求理论, 消费者把效用最大当作目标, 成本理论中, 企业主生产以成本最小为目标, 在厂商理论中, 企业主以利润最大为目标等等. 这说明最大与最小的重要性, 也是数学极值问题. 要解决这些问题, 需要利用函数极值理论.

下面列举几个函数极值在现实生活中应用的实例.

例 公司通过电台、报纸两种方式做销售某种商品广告. 据统计, 销售收入 R (万元)与电台广告费用 x_1 (万元)及报纸广告费 x_2 (万元)之间关系有如下公式:

$R = 15 + 14x_1 + 26x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 5x_2^2$ 广告费用无限的情况下, 求此时的最优广告策略, 以及所获利润最大.

解: 根据利润等于收入与费用之差, 可列函数为:

$$f = (15 + 14x_1 + 26x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 5x_2^2) - (x_1 + x_2) = 15 + 13x_1 + 25x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 5x_2^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 13 - 8x_2 - 4x_1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 25 - 8x_1 - 10x_2 = 0 \end{cases} \text{得 } x_1 = \frac{35}{12}, x_2 = \frac{1}{6}, A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -8 & -10 \end{pmatrix},$$

易验证Hesse矩阵 A 为负定矩阵, f 在驻点 $(\frac{35}{12}, \frac{1}{6})$ 处达到极大值, 同时也是最大值, 即最优: 电台广告费用、报纸广告费用分别为 $\frac{35}{12}$ 万元和 $\frac{1}{6}$ 万元, 此时可获得最大利润.

上例中我们是通过求解约束条件的方程, 得到自由变量, 代入求极值的函数, 将条件极值化为普通极值. 但有时直接解约束条件的方程是困难的, 但通过微分约束条件, 解出某些变量的微分用另一些变量的微分来表示, 再代入求极值函数的微分中, 从而求得其在约束条件下的判别点.

综上所述, 函数的极值在经济生产、现实生活中有广泛应用, 还在物理学、化学、生物工程等学科有重要作用. 故函数极值研究具有非常重要的现实意义.

参考文献

[1] 华东师范大学数学系编, 《数学分析》, 高等教育出版社, 2001年6月, 第三版.
 [2] 华东师范大学数学系. 数学分析(第三版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
 [3] 陈传璋等, 复旦大学数学系. 数学分析上册(第二版), 北京: 高等教育出版社, 1983
 [4] 陈传璋等, 复旦大学数学系. 学分析下册(第二版), 北京: 高等教育出版社, 1983
 [5] 建梅等, 二元函数极值充分条件的k评注[C]. 工科数学, 18(6), 117—221, 202
 [6] 王敏芝, 关于多元函数的极值的判别准则[J], 浙江理工大学学报, 2007: 592—596
 [7] 李艳娟, 马丽萍, 微积分里多元函数极值问题的探讨[J], 沈阳大学学报, 2005: 93—96