

中职数学一元二次不等式的解法探究

侍凤

苏州建设交通高等职业技术学校基础教学部

【摘要】在中职数学课程中，解一元二次不等式是一个重要的教学内容，它是求函数定义域等知识的工具。在数形结合的思想下，引导学生利用已学知识，从解特殊的一元二次不等式，归纳总结提炼出解一元二次不等式的四个关键步骤（口诀）“算-看-画-写”，从而提升解答问题的效率以及提高学习数学的兴趣，使学生获得学习数学的成就感。

【关键词】一元二次方程；一元二次函数；一元二次不等式

【DOI】 10.12252/j.issn.2096-6261.2021.09.458

一元二次不等式在中职数学课程的整个知识体系中是一个重要的教学内容。它是对初中数学中的一元一次不等式和一元一次不等式组的延续和提高，在后面函数、数列、三角函数、圆锥曲线等内容的教学中具有广泛的应用。因此，学好一元二次不等式对中职学生显得尤为重要。但是在教学过程中发现，由于中职学生数学功底相对较弱，并且对数学知识缺乏兴趣，如果教师按照课本知识进行讲解，学生更加不会引起重视，而且给学生增加了记忆量。学生已经具备不等式的性质、一元一次不等式解法、一元二次方程以及一元二次函数的知识，因此教学过程中应基于教材中的探究问题，丰富探究情境，充分利用知识和方法上的对比，以及几何直观引导学生自主探究、合作交流，激发学生学习的主动性和积极性，引导学生归纳总结提炼出解一元二次不等式的步骤，使学生能够熟练、快速地写出一元二次不等式的解集。

一、知识梳理

（一）一元二次方程

一元二次方程的一般形式： $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 。能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值称为一元二次方程的解（或根）。

求解公式：

（1）当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数

$$\text{根, } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

（2）当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根，

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

（3）当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程无实数根。

（二）一元二次函数

一元二次函数（简称二次函数）的表达式为 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 。其中， a 称为

二次项系数， b 为一次项系数， c 为常数项。

二次函数的图像是一条对称轴与 y 轴平行或重合于 y 轴的抛物线。它是轴对称图形，

对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 。当 $a>0$ 时，抛物线开口向上；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下。

如果令 y 值等于零，则可得一个一元二次方程。该方程的解称为方程的根或函数的零

点。即一元二次方程的根就是相应二次函数的图像与 x 轴交点的横坐标。

因此二次函数的图像与 x 轴有以下三种位置关系：

（1）当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，图像与 x 轴有两个交点；

（2）当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，图像与 x 轴只有一个交点；（3）当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，图像与 x 轴无交点。

（三）一元二次不等式

一元二次不等式的一般形式 $ax^2+bx+c>0(\geq 0)$ 或 $ax^2+bx+c<0(\leq 0)$ 。满足一元二次不等式的未知数的取值范围，叫做这个不等式的解集。

观察图1，可以看出一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集就是二次函数的图像与 x 轴上方的点所对应的 x 值的集合。 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集就是二次函数的图像与 x 轴下方的点所对应的 x 值的集合。

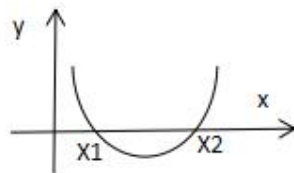


图 1

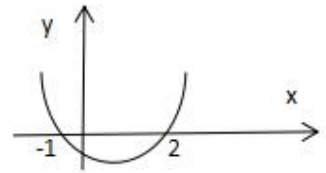


图 2

综上所述，解一元二次不等式需要结合一元二次方程和二次函数的图像来解决。求解一元二次不等式可以先解相应的一元二次方程，确定抛物线与 x 轴交点的横坐标，再根据图像写出不等式的解集。

二、一元二次不等式解法探究

根据一元二次方程，一元二次函数，一元二次不等式三者之间的关系，来探究适合中职学生的一元二次不等式的解法。

1. 解不等式 $x^2-2x-3>0$

解 第一步 令 $x^2-2x-3=0$ ，方程的解为 $x_1=-1, x_2=3$ 。

第二步 画出二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的草图（图2）

第三步 不等式解集为 $\{x|-1<x<3\}$

2. 解不等式 $-x^2+x+6>0$

分析：该不等式的二次项系数为-1，学生发现与前面的第1题不一样，前面所有的复习引入都是在二次项系数大于0的前提下进行的。对大部分中职学生来说无从下手，少部分同学想到可以利用不等式的基本性质（如果不等式的两边同时乘以同一个负数，不等号要改变方向），把二次项系数化为正。

解1 第一步 不等号两边同乘以-1，可得 $x^2-x-6<0$

第二步 令 $x^2 - x - 6 = 0$ ，方程的解为 $x_1 = -2, x_2 = 3$ 。

第三步 画出二次函数 $y = x^2 - x - 6$ 的草图 (图3)

第四步 不等式解集为 $\{x | -2 < x < 3\}$

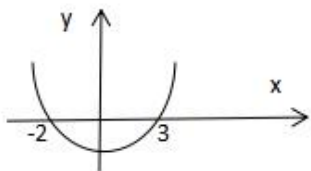


图 3

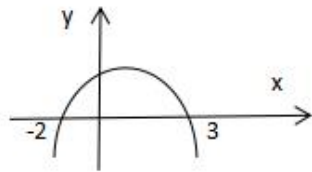


图 4

在教学中发现学生会提出疑问，求 $-x^2 + x + 6 > 0$ 的解集应该是取二次函数与x轴上方的点所对应的x值的集合，但是为什么现在却要取二次函数与x轴下方点所对应的x值的集合？这是由于学生对等价变形没有理解。因此考虑是否存在其他解法，如果按照第1题的解法是否能完成。

解2 第一步 令 $-x^2 + x + 6 = 0$ ，方程的解为 $x_1 = -2, x_2 = 3$ 。

第二步 看二次项系数 $-1 < 0$ ，对应二次函数图像开口朝下；

第三步 画出二次函数 $y = -x^2 + x + 6$ 的草图 (图4)

第四步 不等式解集为 $\{x | -2 < x < 3\}$

通过上面的解法可知，解一元二次不等式，不论 $a > 0$ ，还是 $a < 0$ ，我们都可以按照以下的一般步骤来求解，简记为“算-看-画-写”四步：

第一步 (算) 算 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解；

第二步 (看) 看 a 的正负， $a > 0$ 开口向上， $a < 0$ 开口向下；

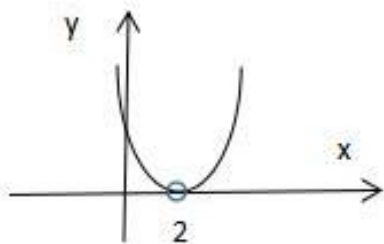
第三步 (画) 画 $y = ax^2 + bx + c$ 的草图；

第四步 (写) 根据图像写出不等式的解集。

3. 解不等式 $x^2 - 4x + 4 > 0$ 。(图像与x轴只有一个交点)

解 令 $x^2 - 4x + 4 = 0$ ， $x_1 = x_2 = 2$ ；

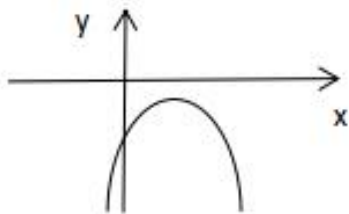
不等式的解集为 $\{x | x \neq 2\}$ 。



4. 解不等式 $-x^2 + x - 4 > 0$ 。(图像与x轴没有交点)

解 令 $-x^2 - 4x + 1 = 0$ ， $\Delta = 1 - 4 \times (-1) \times (-4) = -15 < 0$ ，方程无实数根。

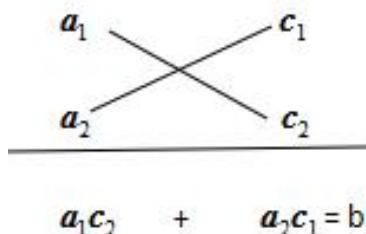
不等式的解集为 \emptyset 。



由此可见，“算-看-画-写”四个步骤适用于求解一般情形的一元二次不等式。“算”对学生要求较高，要快速且准确的算出一元二次方程的根。学生对一元二次方程的求根公式非常熟悉，求根公式适用范围广，正确率高，但有时计算量大。在教学中，教师可以给学生讲解一下其他解一元二次方程的方法，比如十字相乘法，两根可以一起求出来，计算量小。

十字相乘法是因式分解中的一种，简单来讲就是：十字左边相乘等于二次项系数，右边相乘等于常数项，交叉相乘再相加等于一次项系数。

比如因式分解整式 $ax^2 + bx + c$ ，把二次项系数 a 分解成两个因数 a_1, a_2 的积，把常数项 c 分解成两个因数 c_1, c_2 的积，并使 $a_1c_2 + a_2c_1$ 正好等于一次项的系数 b ，因此整式 $ax^2 + bx + c = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$ 。



三、总结

在中职数学教材中，解一元二次不等式需要一元二次函数的图像和性质作基础，根据一元二次函数图像和 X 轴交点坐标确定一元二次函数的取值的正负。最后将结果总结列成表格让学生记忆。表格比较大，内容比较多，对中职学生来说，学习有一定的难度。

俗话说好的记性离不开好的记忆方法。数学公式、定理法则、概念等都需要我们去记忆，只有在记忆的基础上，才能灵活地运用数学知识。对数学公式的记忆，不能有半点差错，否则就会前功尽弃。本文简化了一元二次不等式的写法和解集的求法，在尽可能接近学生的学习基础上分析、探讨一元二次不等式的解法，得到用口诀法“算-看-画-写”四步来解一元二次不等式，可以减轻学生的记忆负担。而且一元二次不等式的解法“算-看-画-写”四步也蕴含了算法的思想，在后续的学习中既可以实现不等式的上机求解，又有助于学生更加清晰地认识不等式的结构，更好地领会问题的本质。

在平时的教学中，教师要努力钻研教材教法，围绕学生的“最近发展区”开展教学设计，精心设计，才能使自己的教学更加符合学生实际，才能让每个学生在数学上都有发展。

参考文献

[1] 马复, 王巧林. 江苏省职业学校文化课教材数学第一册[M]. 南京: 江苏教育出版社, 2011.
 [2] 刘晓伟. 从《一元二次不等式的解法》谈数学课堂的生成性教学[J]. 数理化解题研究, 2020(20): 11-12.
 [3] 唐艳君, 曾峰. 浅谈中学数学中的几种记忆法[J]. 中学数学教学参考, 2019(26): 27-28.