Lebesgue控制收敛定理的一些应用

董于嘉
（重庆三峡学院 数学与信息科学学院　重庆　万州　404100）

[摘　要]本文主要讨论实分析中Lebesgue控制收敛定理在极限和积分混合运算中的一些应用。

[关键词]极限；求导；函数
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.03.294

众所周知，分析学中经常会碰到多重运标问题，诸如极限、积分和求导等，有时交换两种运算会使问题变得简单，那么在什么情况下可以交换运算顺序。Lebesgue控制收敛定理给出满意答案。下面定理叙述参见文献[1]、[3]

若$f_k(x)\in L(E)(k=1,2...)$且$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),x\in E.$

若在E上存在可积函数$\mathrm{F}(x)$,使得$|f_k(x)|\le \mathrm{F}(x)$，$x\in E$,$(k=1,2...)$

则$\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\mathrm{E}}f_k(x)dx=\int_{\mathrm{E}}f_k(x)dx$,$\mathrm{F}(x)$称为$\{f_k(x)\}$的控制函数。

一般说来，控制函数是此类问题能否交换运算顺序的关键。求控制函数，可采用观察法，如例一；同时对于指数型负增长型可先换元化成看起来比较简单的形式。同时不等式的运用也比较重要。诸如

$$(1+x)^r\ge 1+rx.$$

$$\text{当}x\ge -1\text{时，}e^x\ge\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\ge 1+x.$$

$$\text{当}n>1\text{且}|x|\le n\text{时,}(1+\frac{x}{n})^n\ge e^x(1-\frac{x^2}{n}).$$

$$\text{当}x\ge -1\text{时,}\frac{x}{1+x}\le\ln(1+x)\le x\text{等}.$$

例一：求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx^{n-1}}{1+x}dx.$

$$\text{原式可化为}\lim_{n\to\infty}[\frac{x^n}{1+x}\bigg|_0^1+\int_0^1\frac{x^n dx}{(1+x)^2}]=\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}dx$$

后面极限与积分若可交换顺序，将会使问题简单。

分析中要证明其一致收敛性较为复杂，

$$\text{但当}0\le x\le 1\text{时},0\le\frac{x^n}{(1+x)^2}\le 1;$$

$$\text{故当}0\le x<1\text{时},\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{(1+x)^2}=0,\text{控制函数可选择}\mathrm{F}(x)=0,\text{即可。}$$

因此，原式$=\frac{1}{2}.$

例二：求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n^2x}{1+x^2}e^{-n^2x^2}dx.$

该式中出现$e^{-n^2x^2}$为指数负增长型，下面求其控制函数

$$\text{令}u=nx,\text{原式变为}\int_0^{+\infty}\frac{ue^{-u^2}}{1+(u/n)^2}du.$$

$$\text{而}\lim_{n\to\infty}\frac{ue^{-u^2}}{1+\left(u/n\right)^2}=ue^{-u^2},\text{当}u\ge 0\text{时},\frac{ue^{-u^2}}{1+\left(u/n\right)^2}\le ue^{-u^2}.$$

故可选择控制函数$\mathrm{F(u)=u\,e^{-u^2}}$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{ue^{-u^2}}{1+(u/n)^2}du=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{ue^{-u^2}}{1+(u/n)^2}du=\int_0^{+\infty}ue^{-u^2}du=\frac{1}{2}.$$

总之，Lebesgue控制收敛定理对分析中交换多重运算的顺序提供了保证，它在其他学科中的应用也非常广泛。

参考文献

[1]涂郗.Lebesgue控制收敛定理的应用[J].教育现代化，2019，6（73）：119-120.

[2]刘晓辉，康叔卫.Lebesgue控制收敛定理及应用[J].和田师范专科学校学报，2006（06）：231.

[3]张孟娟，金瑾.Lebesgue控制收敛定理的证明及应用[J].贵州工程应用技术学院学报，2016，34（06）：125-133.

[4]黄祖达，李应求，肖宏芳，张敏.控制收敛定理的推广及其应用[J].湖南文理学院学报（自然科学版），2013，25（02）：13-15.

基金项目：2018年度重庆市科委课题：解析与概率数论中的一些问题，编号：cstc2018jcyjAX0540.