幂指数函数的极限求法研究

骆荣奇

（台州学院数信学院　浙江　临海　317000）

[摘　要]只有有效地掌握极限的定义才能对高等数学的内容进行科学地把控。本文对幂指数函数进行简单地介绍，分析指数函数、幂函数和幂指数函数三者间的关系，明确幂指数函数定义的区间，总结幂指数函数的极限求法，即确定型和未确定型的求法，在处理未确定型时可以采用洛必达法则进行求解。

[关键词]幂指数函数；极限；求法

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.03.641

引言

幂指数函数是一种较为特殊的函数，它兼具指数函数和幂函数的特性，对幂指数函数进行剖析，能加深对这三种函数的理解程度，明确常见的求极限的方法，提高自身的数学核心素养。

一、幂指数函数

（一）定义

幂指数函数既像幂函数，又像指数函数，汇集两者的特点。幂指数函数就是幂指数与幂底数都是自变量，形如f（x）=u（x）$^{v(x)}$（x∈E，E是子集），其中u和v都属于E上的函数。如果不给出u（x）和v（x）的具体表现形式，就需要保障u（x）>0（x∈E）。在这个理论的基础上可以把幂指数函数转变为f（y）=e^y以及y=v（x）·lnu（x）。它会随着u、v的变化而发生变化，当两者处于连续的状态时它也是连续的，当两者可微的时候也是可微的。如果把幂指数函数进行简化处理，那么它就是y=x^x。

（二）函数图像

在分析幂指数函数时，一般情况下采用分析作图法进行探究，对它的性质进行分析，并描绘出它的图像。操作的步骤为：（1）对函数的考查范围进行确定，即明确函数的定义域。分析函数是否存在周期性和奇偶性，明确最终的作图范围。（2）计算函数的一阶导数，明确它的极值点和单调区间。（3）计算函数的二阶导数，明确它的拐点和凹凸区间。（4）如果考察的函数是无界的或存在无限区间，就应探究函数是否具备渐近线。（5）结合以上的分析进行作画工作，运用描点的方法得到函数的图像。在实施第二、三步的时候可以采用列表的模式，这样才能提升分析的效率[1]。如果关键点过少，应该对特殊点的函数进行计算，比如曲线同坐标轴的交点。

例如，利用这种方法对幂指数函数y=x^x（x）>0的图像进行分析。（1）对区间[1，∞]进行考察，函数不具备周期性和奇偶性。（2）计算y′的取值。y′=x^x（lnx+1），把y′=0，x=1/e设置为驻点，那么将不存在无y′的点。（3）计算y′′的取值。y′′=x^x[1/x+（lnx+1）^{2}]，这样y′′将一直处于大于0的状态。（4）limx^x=+∞，取值范围是（x→∞）；limx^x=1取值范围是（x→0^+），这就说明函数不具备渐近线。（5）对函数的性质进行考察：当x的取值小于0的时候，函数图像中存在着无数个间断点。当x大于0时，幂指数函数的曲线又是连续的，当x的取值为1/e的时候，能够获得最小值，约等于0.6922。当x的取值范围是[0，1/e]时，曲线处于单调递减的状态，而在[1/e，+∞]范围内时曲线为单调递增的状态，并且点[1，1]也在曲线上。与此同时，对幂指数函数y=x^x进行探究，不存在0的0次方的情况。

二、指数函数、幂函数和幂指数函数三者间的关系

幂函数，它的幂指数处于恒定不变的状态，幂指数是自变量；而指数函数，它的底数处于恒定状态，指数是变量。形式为a^n的式子在数学中被称为a的n次幂，在式子中a是幂的底数，n是幂的指数。而在指数函数中，y是固定的，n是变量，它的变现形式为y=a^x。在幂函数中，n是固定的，a是变量，它的表现性为y=x^n。

三、幂指数函数定义区间

每一个函数的自变量都具备取值范围，就是自变量的定义域。研究幂指数函数的定义域，能够发现y=x^x位于实数轴的0点位置是不具备定义的，它在这个位置时不能进行取值，因为0是存在倒数的。因此，在0点时幂指数函数没有含义。探究y=x^x位于0的情况时，要分析函数无限趋近于0的情况，明确它在无限趋近时的状态，这样就能获得函数近似于0的定义[2]。

四、幂指数函数的极限求法

（一）确定型

对自变量的变化趋势进行探究时，要明确lim[u（x）]$^{v(x)}$，主要有两种类型，即确定型和不确定型。确定型相对来说较为简单，比如，limu（x）=M，（M>0），limv（x）=N，那么lim[u（x）]$^{v(x)}$就等于N^M。这个类型在计算时较为直观，把两个公式进行组合就能得到幂指数函数的极限。

（二）未确定型

第一，对幂指数函数的形态和性质进行分析，能够得到结论这个函数除了在0点之外，在随机的任意一点都具有定义。如果其趋于无穷大，函数的取值也是无穷大的。所以在探究幂指数函数的极限时，需要对0点进行重点地考虑。求limx^x=1取值范围是（x→0），把x=0带入到算式中，函数不具备定义，是没有意义的。在解决这道问题时，应该地对原来的式子进行转化和变形，再计算极限。以指数函数、幂函数和幂指数函数三者间的关系为基础，能够得到x^x=$e^{x\ln x}$，对原来的公式进行转换，就能获得limx^x=lim$e^{x\ln x}$。这时探究lim$e^{x\ln x}$的极限值，求xlnx（x→0）的极限。原来的公式是lnx/（1/x），分式中的分母和分子都是无穷大的。符合洛必达法则的要求。

第二，利用上面的求极限的方法可知x^x（x→0）=1，在计算其他的幂指数函数时也可以借鉴这个方法，获得函数的极限。以x^x（x→0）=1这个结论为基准，把复杂的幂指数函数转变为类似于x^x的形式，结合x^x=1进行求解。以计算limx^{2x}，（x→0）这道题为例探究，已知x^x（x→0）=1，对x^{2x}进行转换，把2x设置为y，所以x就是y的二分之一，那x^{2x}就为x^{2x}（x→0）=$y^{y/4}$（y→0）=1/4，这样就能求得limx^{2x}，（x→0）=1/4。遇到较为复杂的问题时也可以采用这个方法进行转换。在探究幂指数函数时要对它的性质和解题方法进行分析，提升应用的效果。

结论

综上所述，本文对幂指数函数的求极限问题进行剖析，在实际计算的过程中要结合情况选择适应的方法，同时要加强练习工作，这样才能巩固现有的学习成果，加深对幂指数函数极限求法的认识。

参考文献

[1]赖锦湘.基于线性回归模型的复变函数极限求解方法[J].辽东学院学报（自然科学版），2021，28（01）：51-56.

[2]张文丽.探究重极限不存在路径函数的选取方法[J].高等数学研究，2021，24（02）：69-71.