

古塔的变形估计模型

黄柳铃

(福建船政交通职业学院 通识学院 福建 福州 350007)

[摘要] 本文通过MATLAB软件拟合出空间斜平面方程, 用拟合出来的方程剔除测量粗差点; 再通过斜平面的表达式, 来对塔层中心进行拟合^[1], 用MATLAB软件^[2, 3]拟合圆曲线的方法来获得中心坐标, 从而估计出古塔的倾斜程度。

[关键词] 曲线拟合; 最小二乘; MATLAB软件; 加固纠偏; 中心坐标

[DOI] 10.12252/j.issn.2096-6288.2021.03.312

一、背景

古塔, 是中国五千年文明史的载体之一, 被誉为中国古代杰出的高层建筑^[4]。

但是由于古塔建筑物长时间承受自重、气温、风力等各种作用, 偶然还要受地震、飓风的影响、地基的沉降、不均匀沉降, 使建筑物产生各种变形, 如果变形量比较大, 则可能危及建筑物的安全和正常使用, 造成的危害。因此需要将倾斜的古塔建筑物纠偏扶正, 对软弱的地基进行加固处理。并在治理过程中, 进行必要的沉降观测和倾斜观测, 同时观测古塔建筑物裂缝的活动情况, 以检验治理方法的有效性, 估计古塔建筑物性状的预后情况^[5]。

二、模型假设和符号说明

(一) 假设该古塔的塔角是呈八边形的;

(二) 假设附件一提供的4次观测数据所测得的每一层的八个点, 均匀分布在每一层的八个棱角中点上;

(三) 4次测量各层8个点相对塔身绝对禁止;

(四) 假设x轴正方向为东, y轴正方向为北;

(五) 在相邻两次测量时间段内, 假设塔每年变形量一致。

| 变量 | 符号意思 |
|----------|--------------------------------------|
| x_{ij} | 第 <i>i</i> 层 <i>j</i> 点的 <i>x</i> 坐标 |
| y_{ij} | 第 <i>i</i> 层 <i>j</i> 点的 <i>y</i> 坐标 |
| z_{ij} | 第 <i>i</i> 层 <i>j</i> 点的 <i>z</i> 坐标 |
| x_{ic} | 第 <i>i</i> 层中点 <i>x</i> 坐标 |
| y_{ic} | 第 <i>i</i> 层中点 <i>y</i> 坐标 |
| z_{ic} | 第 <i>i</i> 层中点 <i>z</i> 坐标 |
| s_x | 每个测量段在 <i>x</i> 轴位移量 |
| s_y | 每个测量段在 <i>y</i> 轴位移量 |
| s_z | 每个测量段在 <i>z</i> 轴位移量 |
| o_i | 第 <i>i</i> 层中心点 |
| α | 塔尖和第一层中心连线与水平面的夹角 |

三、模型的建立与求解

确定古塔各层中心位置的坐标:

给出确定古塔各层中心位置的通用方法:

(一) 首先通过对某个平面所测量的八个点进行最小二乘法的拟合, 使尽可能多的点在拟合的斜平面上, 或者和拟合的斜平面的距离平方和最小。先还原原始斜平面, 对点进行空间平面拟合, 得到空间平面方程。

空间任意平面的一般表达式为 $ax + by + cz + d = 0$

两边同除以d得: $\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z + 1 = 0$

令 $A = \frac{a}{d}, B = \frac{b}{d}, C = \frac{c}{d}$ 。所以表达式就变成: $Ax + By + Cz + 1 = 0$

当有n个测量点时, 要拟合这个平面, 就可以表示成以下矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

两边左乘 $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}^T$ 得

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i z_i \\ \sum x_i y_i & \sum y_i^2 & \sum y_i z_i \\ \sum x_i z_i & \sum y_i z_i & \sum z_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum x_i \\ -\sum y_i \\ -\sum z_i \end{pmatrix}$$

求得系数A、B、C

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i z_i \\ \sum x_i y_i & \sum y_i^2 & \sum y_i z_i \\ \sum x_i z_i & \sum y_i z_i & \sum z_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\sum x_i \\ -\sum y_i \\ -\sum z_i \end{pmatrix}$$

利用matlab软件拟合参数A、B、C。根据一直采样点拟合出最优平面, 使得每一个采样点到这个平面的距离的平方和最小, 最后输出平面的参数A、B、C。

(二) 第二步通过斜平面的表达式, 选取落在拟合斜平面上的点或与斜平面距离最小的几个点来拟合该平面的中心。同样也用最小二乘法来拟合一个最优的圆心作为塔层中心。

所测得的每一层的n个点, 均匀分布在每一层的n个塔角上, 因此可以通过拟合外接圆圆心方法来获得中心坐标。

圆的标准表达式为: $(x-A)^2 + (y-B)^2 = R^2$

展开得: $x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + A^2 + B^2 - R^2 = 0$

令 $a = -2A, b = -2B, c = A^2 + B^2 - R^2$, 可得圆的一般方程:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

当有n个点时, 所拟合的圆方程可以表示为:

$$\begin{pmatrix} -x_1 & -y_1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -x_n & -y_n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ \vdots \\ x_n^2 + y_n^2 \end{pmatrix}$$

表1 2006年、2016年测量的古塔各层的中心坐标

| 年份 层数 | 2006年测量 | 2016年测量 |
|----------|-------------------------------|-------------------------------|
| 第一层 | (566.6650, 522.7090, 1.7874) | (566.6652, 522.7087, 1.7830) |
| 第二层 | (566.7225, 522.6713, 7.3202) | (566.7234, 522.6703, 7.3146) |
| 第三层 | (566.7786, 522.6346, 12.7553) | (566.7803, 522.6330, 12.7508) |
| 第四层 | (566.8721, 522.5611, 17.0783) | (566.8248, 522.6034, 17.0751) |
| 第五层 | (566.8678, 522.5746, 21.7205) | (566.8726, 522.5717, 21.7160) |
| 第六层 | (566.9185, 522.5443, 26.2351) | (566.9219, 522.5409, 26.2295) |
| 第七层 | (566.9521, 522.5271, 29.8368) | (566.9559, 522.5232, 29.8323) |
| 第八层 | (566.9846, 522.5102, 33.3508) | (566.9888, 522.5060, 33.3454) |
| 第九层 | (567.0176, 522.4933, 36.8548) | (567.0223, 522.4883, 36.8483) |
| 第十层 | (567.0476, 522.4789, 40.1721) | (567.0527, 522.4737, 40.1676) |
| 第十一层 | (567.1013, 522.4385, 44.4408) | (567.1070, 522.4327, 44.4354) |
| 第十二层 | (567.1552, 522.3981, 48.7118) | (567.1612, 522.3919, 48.7074) |
| 第十三层 | (567.2016, 522.3803, 52.8970) | (567.2078, 522.3740, 52.8890) |
| 塔尖 | (567.2447, 522.2407, 55.1233) | (567.2518, 522.2336, 55.1198) |

表2 2009年、2019年测量的古塔各层的中心坐标

| 年份 层数 | 2009年测量 | 2011年测量 |
|----------|---------------------------------|-------------------------------|
| 第一层 | (566.7447, 522.7004, 1.7645) | (566.7448, 522.7003, 1.7633) |
| 第二层 | (566.7790, 522.6720, 7.3090) | (566.7792, 522.6718, 7.2905) |
| 第三层 | (566.8118, 522.6455, 12.7323) | (566.8122, 522.6458, 12.7269) |
| 第四层 | (566.8388, 522.6232, 17.0698) | (566.8392, 522.6228, 17.0520) |
| 第五层 | (566.8671, 522.6003, 21.7094,) | (566.8677, 522.5997, 21.7039) |
| 第六层 | (566.9561, 522.5512, 26.2110) | (566.9567, 522.5504, 26.2045) |
| 第七层 | (566.9892, , 522.5289, 29.8246) | (566.9900, 522.5281, 29.8170) |
| 第八层 | (567.0417, 522.4967, 33.3399) | (567.0425, 522.4959, 33.3366) |
| 第九层 | (567.0940, 522.4640, 36.8438) | (567.0950, 522.4630, 36.8223) |
| 第十层 | (567.1484, 522.4100, 40.1611) | (567.1495, 522.4089, 40.1441) |
| 第十一层 | (567.1908, 522.3695, 44.4326) | (567.1919, 522.3684, 44.4249) |
| 第十二层 | (567.2329, 522.3298, 48.6998) | (567.2342, 522.3285, 48.6839) |
| 第十三层 | (567.2814, 522.2844, 52.8184) | (567.2827, 522.2829, 52.8131) |
| 塔尖 | (567.336, 522.2148, 55.091) | (567.3375, 522.213, 55.087) |

两边左乘 $\begin{pmatrix} -x_i & -y_i & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -x_n & -y_n & -1 \end{pmatrix}^T$ 得:

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum y_i^2 & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum y_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i(x_i^2 + y_i^2) \\ \sum y_i(x_i^2 + y_i^2) \\ -\sum(x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}$$

可得出

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum y_i^2 & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum y_i & n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum x_i(x_i^2 + y_i^2) \\ \sum y_i(x_i^2 + y_i^2) \\ -\sum(x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}$$

所拟合的圆曲线圆心的平面坐标为 $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ 。所以古塔

各层中心坐标为 $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, \frac{\sum_{i=1}^8 z_i}{8})$ 。

最终各次测量的古塔各层的中心坐标见表1和表2:

四、结语

通过2009年和2019年两年不同塔层的中心坐标的变化,直观的观察出古塔的偏差规律。

参考文献

- [1] JGJ8-2007建筑变形测量规范[S].北京: 中国建筑工业出版社, 2007
- [2] 袁建力. 虎丘塔的倾斜控制和加固技术[J]. 土木工程学报, 2004, 37(5)
- [3] 张明会. 古塔变形参数的分析[J]. 鸡西大学学报, 2014, 14(01): 39-42.

作者简介:

黄柳铃(1983.01.30)女,福建宁德,硕士研究生,福建船政交通职业学院通识学院,讲师,研究方向:应用数学。